

التمرين 1

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي: $f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$

و (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أ- احسب $f'(x)$ لكل x من IR.

ب- بين أن: $(\forall x \in [1;+\infty[);|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

2) أ- حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الأفصول 0 ؛

ب- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة للمماس (T).

الحل

1) أ- حساب $f'(x)$ لكل x من IR.

ليكن x عنصرا من IR، لدينا: $f(x) = \frac{x^2+1+2x}{x^2+1} = 1 + \frac{2x}{x^2+1}$

ومنه فإن: $f'(x) = 2\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$، إذن: $(\forall x \in IR); f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

ب- لنبين أن: $(\forall x \in [1;+\infty[);|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

ليكن x عنصرا من المجال $[1;+\infty[$ ، لدينا: $|f'(x)| = \left|\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}\right| = 2\frac{|1-x^2|}{(x^2+1)^2}$

وبما أن: $x \geq 1$ فإن $x^2 \geq 1$ ، أي: $1-x^2 \leq 0$، ومنه فإن: $|f'(x)| = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

وبالتالي: $|f'(x)| - \frac{1}{4} = \frac{8(x^2-1)-(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{-x^4+6x^2-9}{(x^2+1)^2} = \frac{-(x^4-6x^2+9)}{(x^2+1)^2} = \frac{-(x^2-3)^2}{(x^2+1)^2}$$

وبما أن: $-(x^2-3)^2 \leq 0$ و $(x^2+1)^2>0$ فإن: $\frac{-(x^2-3)^2}{(x^2+1)^2} \leq 0$ ، أي: $|f'(x)| - \frac{1}{4} \leq 0$

يعني أن: $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$، إذن: $(\forall x \in IR);|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

2) أ- معادلة المماس (T)

لدينا: $f(0)=1$ و $f'(0)=2$، ومنه فإن معادلة المماس (T) هي: $y=f'(0)(x-0)+f(0)=2x+1$

ب- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) والمماس (T)

ليكن x عنصرا من IR، لدينا: $f(x)-(2x+1) = 1 + \frac{2x}{x^2+1} - 2x - 1$

$$= \frac{2x(1-1-x^2)}{x^2+1} = \frac{-2x^3}{1+x^2}$$

ومنه فإن إشارة $f(x)-(2x+1)$ هي إشارة $-x$.



إذن: على المجال $]0;+\infty[$، المنحنى (C) يوجد تحت المماس (T) ؛

وعلى المجال $]-\infty;0[$، المنحنى (C) يوجد فوق المماس (T).

التمرين 2

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[-2;2]$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4-x^2}}{x} \\ f(0) = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

1) بين أن الدالة f متصلة في الصفر.

2) أ- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق في الصفر ؛

ب- حدد الدالة التآلفية المماسة للدالة f في 0.

3) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في 2، ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها.

الحل

1) لنبين أن الدالة f متصلة في 0.

ليكن x عنصرا من المجال $[-2;2]$ و $x \neq 0$ ، لدينا:

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{4-x} - \sqrt{4-x^2}\right)\left(\sqrt{4-x} + \sqrt{4-x^2}\right)}{x\left(\sqrt{4-x} + \sqrt{4-x^2}\right)} = \frac{\left(\sqrt{4-x}\right)^2 - \left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}{x\left(\sqrt{4-x} + \sqrt{4-x^2}\right)}$$

$$= \frac{4 - x - 4 + x^2}{x\left(\sqrt{4-x} + \sqrt{4-x^2}\right)} = \frac{x(x-1)}{x\left(\sqrt{4-x} + \sqrt{4-x^2}\right)} = \frac{x-1}{\sqrt{4-x} + \sqrt{4-x^2}}$$

وبما أن: $\lim\limits_{x \to 0}(x-1) = -1$ و $\lim\limits_{x \to 0}\left(\sqrt{4-x} + \sqrt{4-x^2}\right) = 2 + 2 = 4$

فإن: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-1}{\sqrt{4-x} + \sqrt{4-x^2}} = -\dfrac{1}{4}$ ، إذن: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\dfrac{1}{4} = f(0)$ ، يعني أن الدالة f متصلة في الصفر.

2) أ- لنبين أن الدالة f قابلة للاشتقاق في الصفر.

ليكن x عنصرا من المجال $[-2;2]$ و $x \neq 0$ ، لدينا:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x}\left(\frac{x-1}{\sqrt{4-x} + \sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{4x - 4 + \sqrt{4-x} + \sqrt{4-x^2}}{4\left(\sqrt{4-x} + \sqrt{4-x^2}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{4\left(\sqrt{4-x} + \sqrt{4-x^2}\right)}\left(\frac{4x - 4 + \sqrt{4-x} + \sqrt{4-x^2}}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{4\left(\sqrt{4-x} + \sqrt{4-x^2}\right)}\left(4 + \frac{\sqrt{4-x} - 2}{x} + \frac{\sqrt{4-x^2} - 2}{x}\right)$$

وبما أن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4-x}-2)(\sqrt{4-x}+2)}{x(\sqrt{4-x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{4-x-4}{x(\sqrt{4-x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{4-x}+2}=\frac{-1}{2+2}=-\frac{1}{4}$$

و

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4-x^2}-2)(\sqrt{4-x^2}+2)}{x(\sqrt{4-x^2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{4-x^2-4}{x(\sqrt{4-x^2}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}+2}=\frac{0}{4}=0$$

و

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{4(\sqrt{4-x}+\sqrt{4-x^2})}=\frac{1}{4(2+2)}=\frac{1}{16}$$

فإن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{4(\sqrt{4-x}+\sqrt{4-x^2})}\left(4+\frac{\sqrt{4-x}-2}{x}+\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}\right)=\frac{1}{16}\times\left(4-\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{64}$$

إذن: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{15}{64}$، يعني أن الدالة f قابلة للاشتقاق في 0، و أن: $f'(0)=\frac{15}{64}$

ب- تحديد الدالة التآلفية المماسة للدالة f في 0

لدينا: $f(0)=-\frac{1}{4}$ و $f'(0)=\frac{15}{64}$

ومنه فإن الدالة التآلفية المماسة للدالة f في 0 هي الدالة u المعرفة على IR بما يلي:

$$u(h)=\frac{15}{64}h-\frac{1}{4}$$

3) دراسة قابلية اشتقاق f على اليسار في 2.

ليكن x عنصرا من المجال $]-2;2[$ و $x\neq 0$ ، لدينا: $f(2)=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

ومنه فإن:

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{1}{x-2}\left(\frac{x-1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\frac{1}{x-2}\left(\frac{x\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{4-x}-\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}(\sqrt{4-x}+\sqrt{4-x^2})}\right)$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{2}(\sqrt{4-x}+\sqrt{4-x^2})}\left(\frac{\sqrt{4-x}+\sqrt{4-x^2}-x\sqrt{2}+\sqrt{2}}{x-2}\right)$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{2}(\sqrt{4-x}+\sqrt{4-x^2})}\left(\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{2}}{x-2}+\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}-\frac{\sqrt{2}(x-2)}{x-2}\right)$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{2}(\sqrt{4-x}+\sqrt{4-x^2})}\left(\frac{-1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{-(x+2)}{x-2}}-\sqrt{2}\right)$$

وبما أن: $\lim_{x \to 2^-} \frac{-(x+2)}{x-2} = +\infty$ فإن $\lim_{x \to 2^-} \sqrt{\frac{-(x+2)}{x-2}} = +\infty$

ولدينا: $\lim_{x \to 2^-} \frac{-1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ و $\lim_{x \to 2^-} \frac{-1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4-x^2}\right)} = -\frac{1}{2}$

ومنه فإن: $\lim_{x \to 2^-} \frac{-1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4-x^2}\right)}\left(\frac{-1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4-x^2}} - \sqrt{\frac{-(x+2)}{x-2}} - \sqrt{2}\right) = +\infty$

أي: $\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 2.

– التأويل الهندسي: منحنى الدالة f يقبل نصف مماس مواز لمحور الأراتيب في النقطة $A\left(2;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ موجه نحو الأسفل.

التمرين 3

1) نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x) = x - \sqrt[3]{x-1}$

أ) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 1، وأول هندسيا النتيجة المحصل عليها.

ب) احسب $f'(x)$ لكل x من المجال $]1;+\infty[$.

2) نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي $g(x) = \sqrt[4]{8+4x} - 2$.

أ) ادرس قابلية اشتقاق الدالة g في $x_0=2$ ، ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها.

ب) احسب $g'(x)$ لكل x من المجال $]-2;+\infty[$.

الحل

1) $f(x) = x - \sqrt[3]{x-1}$

أ– لندرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 1.

ليكن x من المجال $]1;+\infty[$،

لدينا: $\frac{x-1-\sqrt[3]{x-1}}{x-1} = \frac{x-\sqrt[3]{x-1}-1}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

ومنه: $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 - \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

وبما أن: $\lim_{x \to 1^+} \sqrt[3]{(x-1)^2} = 0$ و $\sqrt[3]{(x-1)^2} > 0$ فإن: $\lim_{x \to 1^+} \frac{-1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = -\infty$

إذن: $\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$

وهذا يعني أن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 1.

التأويل الهندسي: Cf منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(1,1)$

ب- لنحسب $f'(x)$ لكل x من المجال $I =]1;+\infty[$

ليكن x من المجال $]1;+\infty[$ ؛ لدينا: $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2}$

ومنه: $(\forall x \in I); f'(x) = \dfrac{3\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2 - 1}{3\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2}$

2) لدينا: $g(x) = \sqrt[4]{8+4x} - 2$

- لندرس قابلية اشتقاق الدالة g في $x_0=2$

لدينا $Dg = [-2+\infty[$

ليكن x من $]-2;2[\cup]2;+\infty[$

لدينا: $\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2} = \dfrac{\sqrt[4]{8+4x}-2}{x-2}$

لاحظ أن: $a - b = \dfrac{a^4 - b^4}{(a+b)(a^2+b^2)}$

وأن: $\left(\sqrt[4]{A}\right)^4 = A$

ومنه:

$$\frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \frac{8+4x-2^4}{(x-2)\left(\sqrt[4]{8+4x}+2\right)\left(\sqrt{8+4x}+4\right)}$$

$$= \frac{4(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt[4]{8+4x}+2\right)\left(\sqrt{8+4x}+4\right)}$$

$$= \frac{4}{\left(\sqrt[4]{8+4x}+2\right)\left(\sqrt{8+4x}+4\right)}$$

إذن: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4}{\left(\sqrt[4]{8+4x}+2\right)\left(\sqrt{8+4x}+4\right)} = \dfrac{1}{8}$

ومنه g قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0=2$ ، ولدينا: $g'(2) = \dfrac{1}{8}$

التأويل الهندسي

المنحنى (C_g) للدالة g يقبل مماسا في النقطة $A(2,0)$ معامله الموجه هو $g'(2) = \dfrac{1}{8}$

2) لنحسب $g'(x)$ لكل x من المجال $]-2;+\infty[$

ليكن من المجال $]-2;+\infty[$،

لدينا: $g'(x) = \dfrac{4}{4\left(\sqrt[4]{8+4x}\right)^3} = \left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{8+4x}}\right)^3$

ومنه: $(\forall x \in]-2;+\infty[); g'(x) = \dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{8+4x}\right)^3}$

التمرين 4

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$، وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f، ثم بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $x=2$ محور تماثل للمنحنى (C).

2) ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

الحل

1) لنحدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

ليكن x من IR، لدينا:

$$x\in D_f \iff x^2-4x+3\geq 0$$
$$\iff (x-1)(x-3)\geq 0$$
$$\iff x\in]-\infty;1]\cup[3;+\infty[$$

إذن: $D_f=]-\infty;1]\cup[3;+\infty[$

لنبين أن المستقيم (D) الذي معادلته $x=2$ محور تماثل للمنحنى (C).

ليكن x من D_f.

لدينا: $x\geq 3$ أو $x\leq 1$، ومنه: $-x\leq -3$ أو $-x\geq -1$، وبالتالي: $4-x\leq 1$ أو $4-x\geq 3$

إذن: $(4-x)\in D_f$

– لنقارن $f(x)$ و $f(4-x)$

لدينا: $f(4-x)=\sqrt{(4-x)^2-4(4-x)+3}=\sqrt{16-8x+x^2-16+4x+3}$
$$=\sqrt{x^2-4x+3}=f(x)$$

إذن المستقيم الذي معادلته $x=2$ محور تماثل للمنحنى (C).

تذكر أن:
$(D):x=a$ محور تماثل إذا تحقق ما يلي:
لكل x من D_f لدينا:
$(2a-x)\in D_f$ و $f(2a-x)=f(x)$

2) لندرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} x^2-4x+3=+\infty$

إذن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ولدينا: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=1$$

ولدينا كذلك: $\lim_{x+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-4x+3}-x$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-4x+3}+x\right)\left(\sqrt{x^2-4x+3}-x\right)}{\sqrt{x^2-4x+3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+3}{\sqrt{x^2-4x+3}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-4+\frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4+\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}=-2$$

إذن المستقيم الذي معادلته $y=x-2$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

التمرين 5

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR^+ بما يلي: $f(x)=\sqrt[3]{ax^2}-\frac{2}{3}x$ حيث a عدد حقيقي موجب قطعا.

1) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0.

2) أ- احسب $f'(x)$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$.

ب- ادرس منحى تغيرات الدالة f.

ج- استنتج أن لكل x و a من المجال $]0;+\infty[$، لدينا: $a^{\frac{1}{3}}\times x^{\frac{2}{3}}\leq\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}x$

الحل

1) لندرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0

لدينا $f(0)=0$.

ليكن x من $]0;+\infty[$، لدينا:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt[3]{ax^2}-\frac{2}{3}x}{x}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{ax^2}}{x}-\frac{2}{3}=\sqrt[3]{\frac{ax^2}{x^3}}-\frac{2}{3}=\sqrt[3]{\frac{a}{x}}-\frac{2}{3}$$

بما أن: $\lim_{x\to0^+}\frac{a}{x}=+\infty$ (لأن $a>0$) فإن: $\lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{\frac{a}{x}}=+\infty$، ومنه: $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0.

2) أ- لنحسب $f'(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$.

ليكن x من $]0;+\infty[$، لدينا:

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{ax^2}-\frac{2}{3}x\right)'=\frac{2ax}{3\sqrt[3]{(ax^2)^2}}-\frac{2}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{ax}{\sqrt[3]{a^2x^4}}-1\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{a}{\sqrt[3]{a^2x}}-1\right)=\frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{a}{x}}-1\right)$$

تذكر أن:
$$\left(\sqrt[n]{u}\right)'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

إذن: $\left(\forall x\in]0;+\infty[\right);f'(x)=\frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{a}{x}}-1\right)$

ب- لندرس منحى تغيرات الدالة f:

ليكن x من المجال $]0; +\infty[$، لدينا:

$$f'(x) \geq 0 \iff \sqrt[3]{\frac{a}{x}} - 1 \geq 0$$
$$\iff \sqrt[3]{\frac{a}{x}} \geq 1$$
$$\iff \frac{a}{x} \geq 1$$
$$\iff x \leq a$$

ومنه: f تزايدية قطعا على المجال $]0; a]$ وتناقصية قطعا على المجال $[a; +\infty[$

ج- استنتاج:

لدينا، حسب السؤال السابق، f تزايدية قطعا على المجال $]0; a]$ وتناقصية قطعا على المجال $[a; +\infty[$

إذن f تقبل قيمة دنوية عند a هي $f(a) = \frac{1}{3}a$

ومنه: $(\forall x \in]0; +\infty[)\,;\, f(x) \leq f(a)$، أي: $(\forall x \in]0; +\infty[)\,;\, \sqrt[3]{ax^2} - \frac{2}{3}x \leq \frac{1}{3}a$

إذن: $(\forall a \in]0; +\infty[);(\forall x \in]0; +\infty[);\, a^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{2}{3}} \leq \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}x$

التمرين 6

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي: $f(x)=x^3-3x-3$

1) ادرس تغيرات الدالة f.

2) ليكن g قصور الدالة f على المجال $[1; +\infty[$.

أ- بين أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1}. حدد مجموعة تعريف الدالة g^{-1}.

ب- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α، وأن $2 < \alpha < 3$.

ج- حدد مجال قابلية اشتقاق g^{-1}.

د- بين أن: $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2 - 1)}$.

الحل

لدينا: $f(x)=x^3-3x-3$ حيث $x \in IR$

1) لندرس تغيرات الدالة f

لدينا: $(\forall x \in IR)\ ;\ f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x-1)(x+1)$

إذن f تزايدية قطعاً على $]1; +\infty[$ و $]-\infty; -1]$ على التوالي، وتناقصية قطعاً على المجال $[-1; 1]$

2) ليكن g قصور الدالة f على المجال $]1; +\infty[$.

أ- لنبين أن الدالة g تقبل دالة عكسية

- لدينا: f دالة حدودية، هي إذن متصلة على IR وبالخصوص على المجال $]1; +\infty[$

ومنه g دالة متصلة على $]1; +\infty[$.

- لدينا g تزايدية قطعاً على $]1; +\infty[$

إذن g تقبل دالة عكسية معرفة على المجال $J = [-5; +\infty[$

(لأن $g(1) = -5$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، ومنه مجموعة تعريف الدالة العكسية g^{-1} هي $[-5; +\infty[$.

ب- لنبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α

بما أن g متصلة وتزايدية قطعا على المجال $]1; +\infty[$ ، و $0 \in [-5; +\infty[$

فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α، في المجال $]1; +\infty[$

- لنبين أن: $2 < \alpha < 3$

لدينا: $g(2)=-1$ و $g(3)=15$ إذن: $g(2) < g(\alpha) < g(3)$

وبما أن g تزايدية قطعاً على المجال $[2;3]$ فإن: $2 < \alpha < 3$

ج) لنحدد مجال قابلية اشتقاق الدالة g^{-1}

لدينا g دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]1; +\infty[$ و $g'(1)=0$

ولدينا: $(\forall x \in]1; +\infty[); g'(x) \neq 0$

إذن الدالة g^{-1} قابلة للاشتقاق على $g(]1; +\infty[)$

أي على $]-5; +\infty[$ ، وبالتالي $]-5; +\infty[$ هو مجال قابلية اشتقاق الدالة g^{-1}.

د- لنبين أن: $(g^{-1})'(0) = \dfrac{1}{3(\alpha^2 - 1)}$

لدينا: g^{-1} قابلة للاشتقاق في الصفر (لأن: $0 \in]-5; +\infty[$)

إذن: $(g^{-1})'(0) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(0))}$

وبما أن: $g(\alpha) = 0$ فإن $g^{-1}(0) = \alpha$، ولدينا: $g'(\alpha) = 3\alpha^2 - 3$، ومنه: $(g^{-1})'(0) = \dfrac{1}{3(\alpha^2 - 1)}$.

التمرين ٦

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بما يلي:

$$f(x)=x-2\sqrt{x-1}$$

و (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) بين أن: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$، ثم أول هندسيا هذه النتيجة.

2) أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

ب- احسب $f'(x)$ لكل x من المجال $]1;+\infty[$.

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f.

3) أ- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C)، ثم ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=x$.

ب- ادرس تقعر المنحنى (C).

ج- أنشئ المنحنى (C).

4) ليكن g قصور الدالة f على المجال $[2;+\infty[$.

أ- بين أن g تقبل دالة عكسية معرفة على مجال I يتم تحديده.

ب- احسب $(g^{-1})'(1)$.

ج- أنشئ في نفس المعلم المنحنى (C') الممثل للدالة العكسية g^{-1} للدالة g.

د- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من المجال I.

الحل

1) لنبين أن: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$

ليكن x من المجال $]1;+\infty[$، لدينا:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x-2\sqrt{x-1}-1}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}-\frac{2\sqrt{x-1}}{x-1}$$

$$=1-\frac{2\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2}=1-\frac{2}{\sqrt{x-1}}$$

بما أن: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt{x-1}=0$ و $(\forall x\in]1;+\infty[);\sqrt{x-1}>0$

فإن: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}=+\infty$، ومنه: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$، إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 1.

التأويل الهندسي: المنحنى (C) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل.

2) أ- لنحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

ليكن x من المجال $]1; +\infty[$ ، لدينا:

$$f(x) = x - 2\sqrt{x-1} = (x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1 = \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2$$

وبما أن: $\lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt{x-1} - 1\right) = +\infty$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

ب- الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]1; +\infty[$ ولدينا لكل x من المجال $]1; +\infty[$.

$$f'(x) = 1 - 2\frac{(x-1)'}{2\sqrt{x-1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x-1}} = \frac{\left(\sqrt{x-1} - 1\right)\left(\sqrt{x-1} + 1\right)}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1} + 1\right)} = \frac{x-2}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1} + 1\right)}$$

ج- جدول تغيرات الدالة f

لدينا لكل x من المجال $]1; +\infty[$ ، $\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1} + 1\right) > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x-2$ ، وبالتالي جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) - تحديد الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

لدينا: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

ليكن x من $]1; +\infty[$ ، لدينا $\frac{f(x)}{x} = \frac{x - 2\sqrt{x-1}}{x} = 1 - \frac{2\sqrt{x-1}}{x}$

$$= 1 - 2\sqrt{\frac{x-1}{x^2}} = 1 - 2\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

بما أن: $\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 0$ فإن $\lim_{x \to +\infty}\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = 0$ ، ومنه: $\lim_{x \to +\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$

ولدينا: $\lim_{x \to +\infty}\left(f(x) - x\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(-2\sqrt{x-1}\right) = -\infty$

إذن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$

- دراسة الوضع النسبي لكل من (Δ) و (C):

ليكن x من $]1; +\infty[$ ، لدينا: $f(x) - y = x - 2\sqrt{x-1} - x = -2\sqrt{x-1}$

لكل x من $]1; +\infty[$ ، لدينا: $f(x)-y<0$ إذن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (Δ).

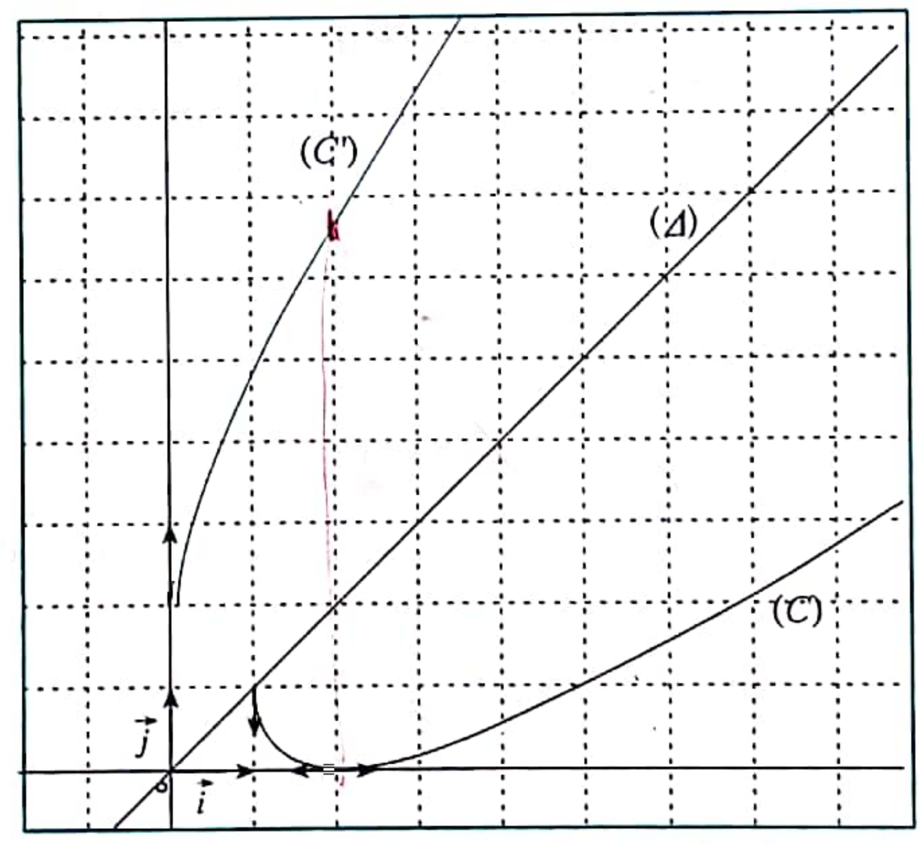
ب- دراسة تقعر المنحنى (C).

ليكن x من المجال $]1; +\infty[$ ، لدينا:

$$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)' = \frac{\left(\sqrt{x-1}\right)'}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2} = \frac{1}{2\left(\sqrt{x-1}\right)^3}$$

لدينا $(\forall x \in]1; +\infty[); f''(x) > 0$ ، إذن المنحنى (C) له تقعر موجه نحو الأراتيب الموجبة.

ج- إنشاء المنحنى (C).



4) أ- لنبين أن g تقبل دالة عكسية معرفة على مجال I يتم تحديده.

لدينا g متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[2; +\infty[$

إذن g تقبل دالة عكسية معرفة على المجال I حيث:

$$I = g([2; +\infty[) = [g(2); \lim_{x \to +\infty} g(x)[= [0; +\infty[$$

ب- لنحدد $(g^{-1})'(1)$

لنحدد x_0 حيث $g(x_0)=1$ و $x_0 \geq 2$

لدينا:
$$g(x_0) = 1 \iff x_0 - 2\sqrt{x_0 - 1} = 1$$
$$\iff (\sqrt{x_0 - 1} - 1)^2 = 1$$
$$\iff \sqrt{x_0 - 1} - 1 = 1 \text{ أو } \sqrt{x_0 - 1} - 1 = -1$$
$$\iff \sqrt{x_0 - 1} = 2 \text{ أو } \sqrt{x_0 - 1} = 0$$
$$\iff x_0 = 5 \text{ أو } x_0 = 1$$

بما أن: $x_0 \geq 2$ فإن $x_0=5$ ، ومنه: $g(5)=1$، وهذا يعني أن: $g^{-1}(1)=5$

إذن: $(g^{-1})'(1) = \dfrac{1}{g'(5)} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

ج- إنشاء منحنى الدالة g^{-1}

لدينا (C') هو مماثل المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ على المجال $[2; +\infty[$.

انظر الشكل السابق.

د- تحديد $g^{-1}(x)$ لكل x من $[0; +\infty[$.

ليكن x من $[0; +\infty[$ و y من $[2; +\infty[$ بحيث: $g(y)=x$

لدينا:
$$g(y) = x \iff y - 2\sqrt{y-1} = x$$
$$\iff (\sqrt{y-1} - 1)^2 = x$$
$$\iff |\sqrt{y-1} - 1| = \sqrt{x}$$

ولدينا:
$$y \in [2, +\infty[\iff y \geq 2$$
$$\iff \sqrt{y-1} \geq 1$$
$$\iff \sqrt{y-1} - 1 \geq 0$$

إذن : $|\sqrt{y-1} - 1| = \sqrt{y-1} - 1$

ومنه:
$$g(y) = x \iff \sqrt{y-1} - 1 = \sqrt{x}$$
$$\iff \sqrt{y-1} = \sqrt{x} + 1$$
$$\iff y = (\sqrt{x} + 1)^2 + 1 = x + 2\sqrt{x} + 2$$

إذن: $(\forall x \in [0; +\infty[) ; g^{-1}(x) = x + 2\sqrt{x} + 2$

التمرين 8

لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $(\forall x \in IR); f(x) = \frac{x}{2}\left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right)$.

ولكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

1) احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

2) أ- بين أنه مهما يكن x من IR لدينا: $f'(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right)^2}{2\sqrt{x^2 + 4}}$

ب- استنتج تغيرات الدالة f.

3) أ- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f).

ب- أعط معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول 0 .

ج- أنشئ المنحنى (C_f).

4) أ- بين أن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يتم تحديده.

ب- بين أنه لكل x من J: $f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{x + 1}}$.

ج- احسب $(f^{-1})'(0)$.

د- أنشئ $(C_{f^{-1}})$.

الحل

1) حساب النهايتين $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

لدينا: $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 4} = +\infty$ ، إذن: $\lim_{x \to +\infty}\left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right) = +\infty$

ولدينا أيضا: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ ، إذن: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

ليكن x عنصرا من IR_-^*،

لدينا: $x + \sqrt{x^2 + 4} = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right)\left(x - \sqrt{x^2 + 4}\right)}{x - \sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x^2 - (x^2 + 4)}{x - \sqrt{x^2 + 4}} = \frac{-4}{x - \sqrt{x^2 + 4}}$

إذن: $f(x) = \frac{x}{2} \times \frac{-4}{x - \sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{2} \times \frac{-4}{x\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}\right)} = \frac{-2}{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}$

إذن: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2}{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} = -1$

2) أ- حساب $f'(x)$

ليكن x عنصرا من IR ،

لدينا: $f'(x)=\left(\frac{x}{2}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\right)'=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+\frac{x}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+\frac{x}{2}\left(\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2+4}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}{\sqrt{x^2+4}}$$

إذن: $f'(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)^2}{2\sqrt{x^2+4}}$ لكل x من IR

ب- استنتاج تغيرات الدالة f

لدينا: $\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)^2>0$ و $2\sqrt{x^2+4}>0$،

إذن: $f'(x)>0$ لكل x من IR

ومنه f دالة تزايدية قطعا على IR،

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	-1 ↗ $+\infty$

3) أ- دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

لدينا: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$

إذن: المستقيم الذي معادلته $y=-1$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ثم لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)=+\infty$

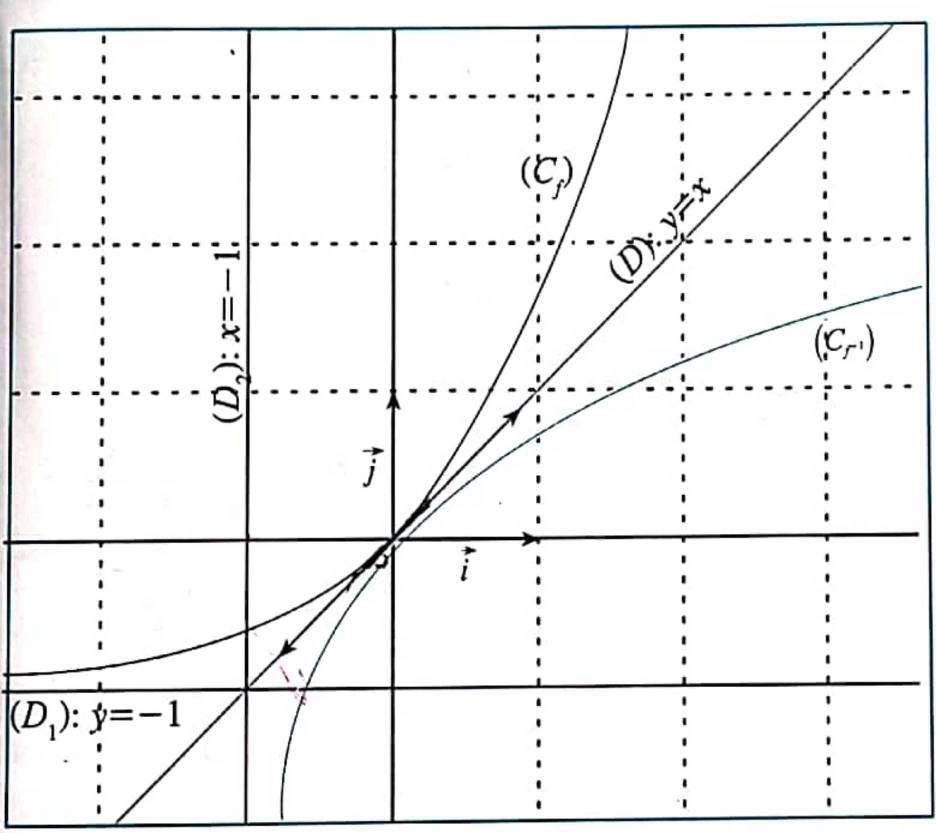
إذن (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

ب- معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الأفصول 0

لدينا: $f(0)=0$ و $f'(0)=1$

إذن: $y=x$ هي معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول 0.

ج– المنحنى:



4) أ– لنبين أن f تقبل دالة عكسية J

– لدينا الدالة $x \mapsto x + \sqrt{x^2+4}$ متصلة على IR (مجموع دالتين متصلتين على IR) ، والدالة $x \mapsto \frac{x}{2}$ متصلة على IR، إذن: f دالة متصلة على IR جداء دالتين متصلتين على IR

– لدينا كذلك f دالة تزايدية قطعا على IR

– ولدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

إذن: f تقبل دالة عكسية معرفة على المجال $(J = f(IR) =]-1; +\infty[$

ب– تحديد صيغة $f^{-1}(x)$

لكل y من IR و x من J لدينا: $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y) = \frac{y}{2}\left(y + \sqrt{y^2+4}\right)$

$$\Leftrightarrow x - \frac{y^2}{2} = \frac{y}{2}\sqrt{y^2+4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{y^2}{2}\right)^2 = \frac{y^2}{4}\left(y^2+4\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - xy^2 + \frac{y^4}{4} = \frac{y^4}{4} + y^2$$

أي: $y^2(1+x)=x^2$ ، ومنه: $y^2 = \frac{x^2}{1+x}$ ، إذن: $y = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ أو $y = \frac{-x}{\sqrt{1+x}}$

وبما أن: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ فإن: $\lim_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$

إذن: $f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ (لأن: $\lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{\sqrt{1+x}} = -\infty$) تحقق من ذلك

ج- حساب $(f^{-1})'(0)$

لدينا: $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)}$

إذن: $(f^{-1})'(0) = 1$

د- إنشاء المنحنى $(C_{f^{-1}})$

منحنى الدالة f^{-1} هو مماثل منحنى الدالة f

بالنسبة للمنصف الأول للمعلم (المستقيم ذو المعادلة $y=x$).(لأن المعلم متعامد ممنظم)

(انظر الشكل السابق)

التمرين 9

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي : $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

وليكن (C_f) منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم ادرس زوجية الدالة f.

2) ادرس تغيرات الدالة f.

3) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f).

4) أ- حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي أفصولها 0.

ب- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (T).

ج- أنشئ (C_f).

5) أ- بين أن f تقبل دالة عكسية معرفة على IR.

ب- لتكن f^{-1} الدالة العكسية للدالة f.

بين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق في الصفر واحسب $(f^{-1})'(0)$.

ج- بين أن f^{-1} دالة فردية ثم أنشئ $(C_{f^{-1}})$ منحنى الدالة f^{-1}

6) حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة: $m\sqrt{1+x^2} = x$ حيث m بارامتر حقيقي.

الحل

1) تحديد D_f مجموعة تعريف الدالة f، ودراسة زوجية الدالة f.

ليكن x عنصرا من IR ، $x \in D_f \Leftrightarrow 1 + x^2 > 0$ (دائما محققة) ومنه: $D_f = IR$

دراسة زوجية الدالة f:

ليكن x من IR، لدينا: $-x \in IR$، و $f(-x) = -x - \frac{x}{\sqrt{1+(-x)^2}} = -\left(x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = -f(x)$

إذن: f دالة فردية، وبالتالي يكفي دراستها على $D_f \cap IR^+$، أي $D_E = [0; +\infty[$

2) دراسة تغيرات الدالة f:

ليكن x من IR لدينا:

$$f'(x) = 1 + \frac{1\left(\sqrt{1+x^2}\right) + x.\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = 1 + \frac{1 + x^2 + x^2}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3} = 1 + \frac{1+2x^2}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}$$

لدينا: $(\forall x \in IR); f'(x) > 0$، ولدينا: لكل x من $]0; +\infty[$

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x + \frac{x}{x\sqrt{\frac{1}{x}+1}} = x + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}}$$

وبما أن: $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}} = 1$ فإن: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ولدينا: f دالة فردية، إذن: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

وجدول تغيرات الدالة f هو كالتالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

3) دراسة الفروع اللانهائية:

- ليكن x من $]0; +\infty[$ ، لدينا: $f(x) - x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}}$

وبما أن: $\lim_{x+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = 1$ ، فإن: $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 1$



وبالتالي: المستقيم الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$.

- ليكن x من $]-\infty;0[$ ، لدينا: $f(x)-x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x}+1}}=\frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$

وبما أن: $\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=-1$ فإن: $\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=-1$

وبالتالي: المستقيم الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$.

ملحوظة:

- إذا كانت f دالة فردية، وإذا كان (C_f) منحنى الدالة f يقبل المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=ax+b$ مقاربا مائلا بجوار $+\infty$، فإن $(y=ax-b)$ (Δ') مقارب مائل لـــ (C_f) بجوار $-\infty$.

4) أ- تحديد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي أفصولها 0.

لدينا معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي أفصولها 0 هي:

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي: $y=2x$

ب- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T):

ليكن x من IR، لدينا: $f(x)-2x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-x=x\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-1\right)$

$$=x\left(\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)=x\left(\frac{1-1-x^2}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}\right)=\frac{-x^3}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

وبما أن: $\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)>0$ لكل x من IR، فإن إشارة $f(x)-2x$ هي إشارة $-x^3$

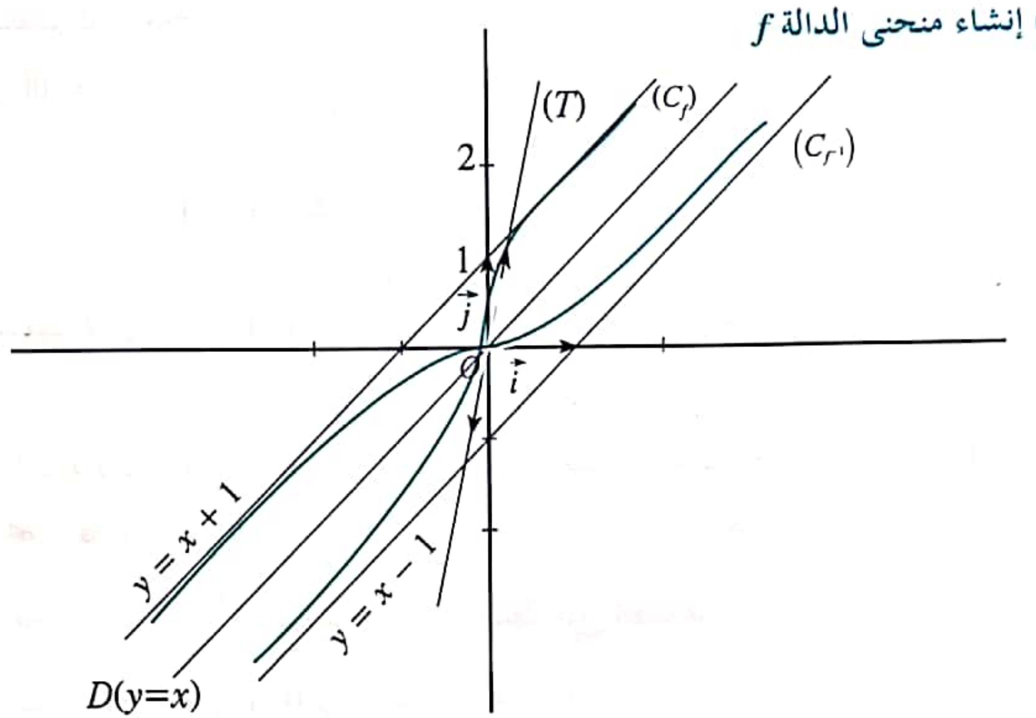
الجدول التالي يلخص إشارة $f(x)-2x$ ويحدد وضع المنحنى (C_f) والمماس T

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-2x$	+	0	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق المماس (T)	$O(0,0)$ نقطة تقاطع (C_f) و (T)	(C_f) تحت المماس (T)

ج) إنشاء منحنى الدالة f



ج) إنشاء منحنى الدالة f



5) أ– لنبين أن f تقبل دالة عكسية معرفة على IR.

لدينا f دالة متصلة على IR (مجموع دالتين متصلتين هما: $x \mapsto x$ و $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$)

و f تزايدية قطعا على IR، إذن f تقبل دالة عكسية معرفة على $f(IR)$ حيث:

$$f(IR) = f(]-\infty; +\infty[) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty; +\infty[$$

ب– لنبين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق في الصفر.

لدينا: $f(0)=0$ ، ومنه: $f^{-1}(0)=0$

f قابلة للاشتقاق في الصفر و $f'(0)=2$ ، ومنه $f'(0) \neq 0$

إذن f^{-1} قابلة للاشتقاق في 0

و $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$

تذكر:
لكي تكون f^{-1} قابلة للاشتقاق في y_0 حيث $f(x_0)=y_0$ يجب أن تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0) \neq 0$

ج) لنبين أن f^{-1} دالة فردية:

لدينا: مجموعة تعريف f^{-1} هي IR، و IR متماثلة بالنسبة للصفر.

أي: لكل x من IR، لدينا $-x$ ينتمي IR:

ليكن x من IR و y من IR، لدينا: $(f^{-1})(-x) = y \Leftrightarrow f(y) = -x$

$$\Leftrightarrow -f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow f(-y) = x \quad \text{(لأن } f \text{ دالة فردية)}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = -y$$

(لأن: $y=f^{-1}(-x)$ $\Leftrightarrow f^{-1}(x)=-f^{-1}(-x)$

$\Leftrightarrow f^{-1}(-x)=-f^{-1}(x)$

إذن: لكل x من IR، لدينا $-x\in IR$ و $f^{-1}(-x)=-f^{-1}(x)$

إذن: f^{-1} دالة فردية.

إنشاء $(C_{f^{-1}})$ منحنى الدالة f^{-1}، انظر الشكل السابق

لدينا: (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول، أي المستقيم الذي معادلته $y=x$ وذلك في معلم متعامد ممنظم.

6) تحديد عدد حلول المعادلة $m\sqrt{1+x^2}=x$ مبيانيا حيث m بارامتر حقيقي

ليكن x من IR و m من IR، لديناً: $m\sqrt{1+x^2}=x \Leftrightarrow m=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(لاحظ أن $\sqrt{1+x^2}\neq 0$) $\Leftrightarrow m+x=x+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Leftrightarrow x+m=f(x)$

لدينا: المستقيم (Δ_m) الذي معادلته $y=x+m$ يوازي المستقيمين الذين معادلتاهما $y=x-1$ و $y=x+1$ (أنشئ عدة مستقيمات معادلاتها على شكل $y=x+m$ حيث m يتغير في IR)

ونلاحظ أنه:

- إذا كان $m\geq 1$ فإن $\Delta_m(y=x+m)$ لا يتقاطع مع المنحنى (C_f)، وبالتالي عدد الحلول هو 0
- إذا كان $-1<m<1$ فإن $\Delta_m(y=x+m)$ يتقاطع مع المنحنى (C_f) في نقطة وحيدة ، وبالتالي المعادلة تقبل حلا وحيدا.
- إذا كان $m\leq -1$ فإن $\Delta_m(y=x+m)$ لا يتقاطع مع المنحنى (C_f) ، وبالتالي المعادلة ليس لها حل.

التمرين 10

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $D=]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$ بما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{2x-\sqrt{x^2-x}} \\ f(0)=0 \end{cases}$

و (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أ- بين أن الدالة f متصلة على اليسار في الصفر ؛

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ج- استنتج دراسة الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C).

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في الصفر وعلى اليمين في 1.

3) أ- بين أن: $(\forall x\in D-\{0;1\});f'(x)=\dfrac{(f(x))^2}{2x\sqrt{x^2-x}}$.

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f، ثم ارسم المنحنى (C).

4) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = [1; +\infty[$.

أ- بين أن g تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يتم تحديده.

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J.

الحل

1) أ- لنبين أن f متصلة على اليسار في الصفر

ليكن x عنصرا من المجال $]-\infty; 0[$، لدينا:

$$f(x) = \frac{x\left(2x + \sqrt{x^2 - x}\right)}{\left(2x - \sqrt{x^2 - x}\right)\left(2x + \sqrt{x^2 - x}\right)} = \frac{x\left(2x + \sqrt{x^2 - x}\right)}{4x^2 - x^2 + x} = \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1}$$

وبما أن: $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{2x + \sqrt{x^2 - x}}{3x + 1} = \frac{0}{1} = 0$ و $f(0)=0$

فإن $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$ ؛ يعني أن f متصلة على اليسار في 0.

ب- • حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

ليكن x عنصرا من $]1; +\infty[$ ، لدينا:

$$f(x) = \frac{x}{2x - \sqrt{x^2 - x}} = \frac{x}{2x - x\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{x}{x\left(2 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right)} = \frac{1}{2 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}$$

وبما أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$ فإن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = 1$.

ومنه فإن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = 1$ ، يعني أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

- حساب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

ليكن x عنصرا من المجال $]-\infty; 0[$ ، لدينا:

$$f(x) = \frac{x}{2x - \sqrt{x^2 - x}} = \frac{x}{2x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{x}{x\left(2 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right)} = \frac{1}{2 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}$$

وبما أن $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = 1$ ، ومنه فإن: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{1}{3}$

يعني أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{3}$

ج- استنتاج

- بما أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ فإن المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

- بما أن: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{3}$ فإن المستقيم الذي معادلته $y = \frac{1}{3}$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

2) • **دراسة قابلية اشتقاق f على اليسار في 0.**

ليكن x عنصرا من المجال $]-\infty;0[$ ، لدينا: $f(0)=0$

و $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{2x-\sqrt{x^2-x}}\right) = \frac{1}{2x-\sqrt{x^2-x}}$

وبما أن: $\lim_{x\to0^-} 2x-\sqrt{x^2-x} = 0^-$ فإن: $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{2x-\sqrt{x^2-x}} = -\infty$

إذن: $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$

يعني أن: الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 0.

• **دراسة قابلية اشتقاق f على اليمين في 1.**

ليكن x عنصرا من المجال $]1;+\infty[$، لدينا: $f(1) = \frac{1}{2}$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1}{x-1}\left(\frac{x}{2x-\sqrt{x^2-x}} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{x-1}\left(\frac{2x-2x+\sqrt{x^2-x}}{2\left(2x-\sqrt{x^2-x}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{2\left(2x-\sqrt{x^2-x}\right)} \times \frac{\sqrt{x^2-x}}{x-1} = \frac{1}{2\left(2x-\sqrt{x^2-x}\right)} \times \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

وبما أن: $\lim_{x\to1^+}\frac{x}{x-1} = +\infty$ فإن: $\lim_{x\to1^+}\sqrt{\frac{x}{x-1}} = +\infty$ ، ولدينا: $\lim_{x\to1^+}\frac{1}{2\left(2x-\sqrt{x^2-x}\right)} = \frac{1}{4}$

ومنه فإن: $\lim_{x\to1^+}\frac{1}{2\left(2x-\sqrt{x^2-x}\right)} \times \sqrt{\frac{x}{x-1}} = +\infty$ ، إذن: $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$

يعني أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين 1.

3) أ- لنبين أن: $(\forall x \in D-\{0;1\});\ f'(x) = \frac{\left(f(x)\right)^2}{2x\sqrt{x^2-x}}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]1;+\infty[$ و $]-\infty;0[$

ليكن x عنصرا من $D-\{0;1\}$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{1}{\left(2x-\sqrt{x^2-x}\right)^2} \times \left[\left(2x-\sqrt{x^2-x}\right) - x\left(2-\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\left(2x-\sqrt{x^2-x}\right)^2} \times \left[\frac{4x\sqrt{x^2-x} - 2x^2 + 2x - 4x\sqrt{x^2-x} + 2x^2 - x}{2\sqrt{x^2-x}}\right]$$

$$= \frac{1}{\left(2x-\sqrt{x^2-x}\right)^2} \times \left[\frac{x}{2\sqrt{x^2-x}}\right] = \frac{1}{2x\sqrt{x^2-x}} \times \frac{x^2}{\left(2x-\sqrt{x^2-x}\right)^2} = \frac{\left(f(x)\right)^2}{2x\sqrt{2x^2-x}}$$

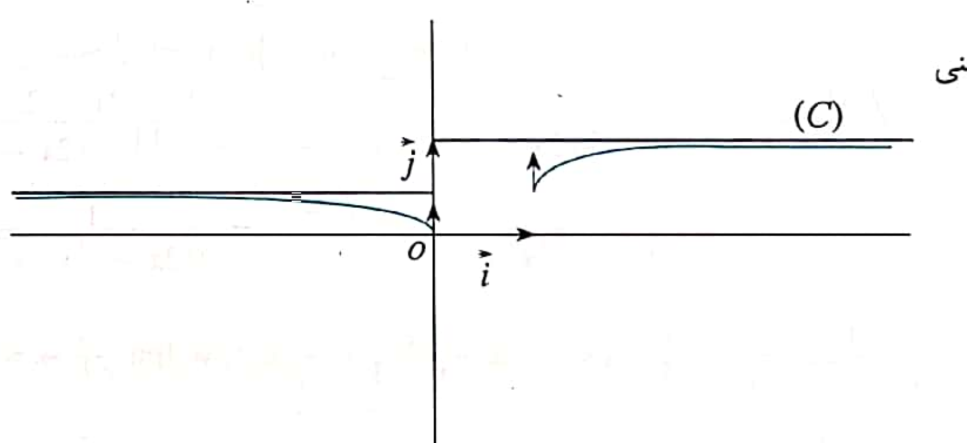
إذن: $(\forall x \in D-\{0;1\});\ f'(x) = \frac{\left(f(x)\right)^2}{2x\sqrt{x^2-x}}$

ب- جدول تغيرات الدالة f.

بما أن إشارة $f'(x)$ هي إشارة x فإن جدول تغيرات f هو كالتالي:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty$ ‖	//////	‖ $+\infty$	$+$	
f	$\frac{1}{3}$	↘	0 ‖	//////	‖ $\frac{1}{2}$	↗	1

- المنحنى



4) أ- لنبين أن g تقبل دالة عكسية.

الدالة g متصلة وتزايدية قطعا على المجال $I=[1;+\infty[$

ومنه فإن g تقبل دالة عكسية معرفة على $J=f(I)$ ، حيث: $J=\left[f(1);\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[=\left[\frac{1}{2};1\right[$

ب- تحديد $g^{-1}(x)$ لكل x من J.

ليكن x عنصرا من $\left[\frac{1}{2};1\right[$ و y عنصرا من $[1;+\infty[$ بحيث: $g^{-1}(x)=y$

لدينا:

$$g^{-1}(x)=y \iff g(y)=x$$

$$\iff \frac{y}{2y-\sqrt{y^2-y}}=x$$

$$\iff y=x\left(2y-\sqrt{y^2-y}\right)$$

$$\iff x\sqrt{y^2-y}=y(2x-1)$$

$$\iff x^2(y^2-y)=y^2(2x-1)^2$$

$$\iff -x^2=y\left[(2x-1)^2-x^2\right]=y(3x^2-4x+1)$$

$$\iff y=\frac{-x^2}{3x^2-4x+1}$$



إذن: $\left(\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right[\right); f'(x) = \frac{-x^2}{3x^2 - 4x + 1}$

التمرين 11

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR^* بما يلي:
$$\begin{cases} f(x) = -x + \frac{2}{x};\ x \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[\\ f(x) = \frac{1+x}{2\sqrt{x}};\ x \in [1; +\infty[\end{cases}$$

1) بين أن الدالة f متصلة في النقطة $x_0=1$.

2) أ– بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليسار في $x_0=1$.

ب– بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في $x_0=1$.

3) أ– بين أن: $f'(x) < 0$ $(\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[)$.

ب– احسب $f'(x)$ لكل x من $]1, +\infty[$.

ج– أعط جدول تغيرات الدالة f.

4) أ– ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f).

ب– أنشئ (C_f).

الحل

1) لنبين أن f متصلة في $x_0=1$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(-x + \frac{2}{x}\right) = -1 + 2 = 1 = f(1)$

و $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1+x}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{2\sqrt{1}} = 1 = f(1)$ إذن: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$، ومنه: f متصلة في 1

2) أ– لنبين أن f قابلة للاشتقاق على اليسار في $x_0=1$

ليكن x من المجال $]0; 1[$

لدينا: $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{-x+\frac{2}{x}-1}{x-1} = \frac{-x^2-x+2}{x(x-1)} = \frac{(x-1)(-2-x)}{x(x-1)} = \frac{-2-x}{x}$

ومنه: $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-2-x}{x} = -3$ إذن: f قابلة للاشتقاق على اليسار في 1 و $f'_g(1) = -3$

ب– لنبين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 .

ليكن x من المجال $]1; +\infty[$ ؛



Scanné avec CamScanner

لدينا: $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{\dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}-1}{x-1}=\dfrac{1+x-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x-1)}$

أي أن: $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$

ومنه: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}=0$

إذن: f قابلة للاشتقاق على اليمين في $x_0=1$ و $f'_d(1)=0$

ملحوظة: $f'_d(1)\neq f'_g(1)$، إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0=1$

3) – لنبين أن: $f'(x)<0$ $(\forall x\in]-\infty;0[\cup]0;1[)$

ليكن $x\in]-\infty;0[\cup]0;1[$، لدينا: $f'(x)=-1-\dfrac{2}{x^2}=-\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)$، بما أن: $1+\dfrac{2}{x^2}>0$ فإن: $f'(x)<0$

إذن: $(\forall x\in]-\infty;0[\cup]0;1[)\ f'(x)<0$

ب– لنحسب $f'(x)$ لكل x من المجال $]1;+\infty[$

$(\forall x\in]1;+\infty[),\ f'(x)=\dfrac{2\sqrt{x}-(1+x)\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{4x}=\dfrac{2x-1-x}{4x\sqrt{x}}=\dfrac{x-1}{4x\sqrt{x}}$

ج– جدول تغيرات الدالة f

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x+\dfrac{2}{x}\right)=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-x+\dfrac{2}{x}\right)=-\infty$

لدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x}=0\end{cases}$ ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$ -3	‖ 0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

4) لنحدد الفروع اللانهائية للمنحنى C_f

– لدينا: $(\forall x\in]-\infty;0[);\ f(x)=-x+\dfrac{2}{x}$

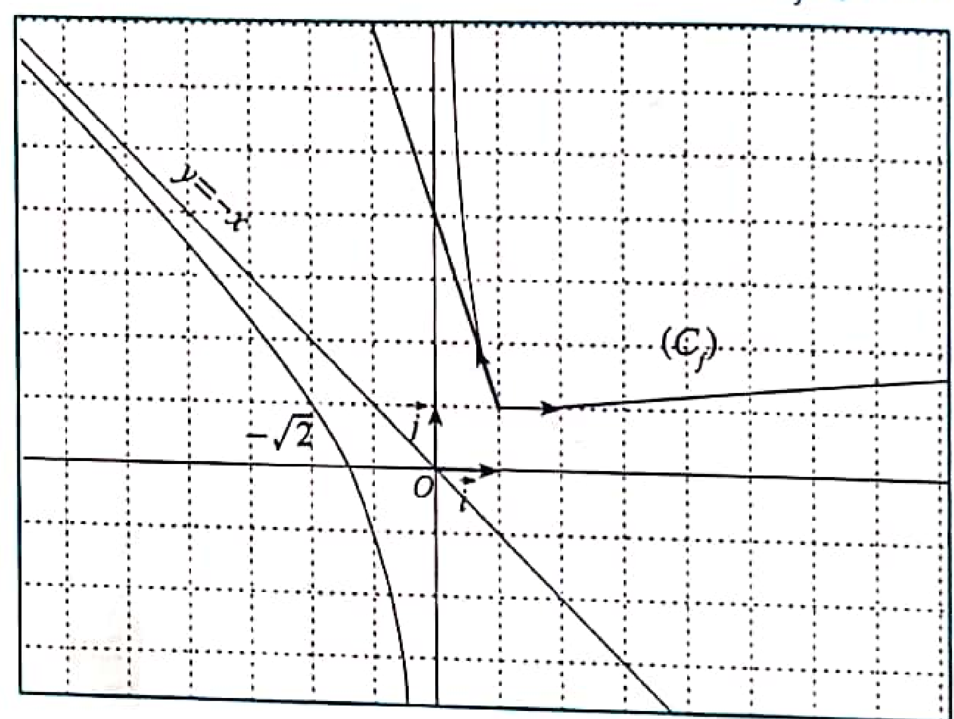
ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$ ، يعني أن: $(D):y=-x$ مقارب مائل لـ C_f بجوار $-\infty$

- لدينا: $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ ، ومنه: المستقيم الذي معادلته $x=0$ مقارب عمودي لـ (C_f).

- لدينا: $f(x)=\frac{1+x}{2\sqrt{x}}$ ، $(\forall x\in]1;+\infty[)$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=0$

إذن (C_f) يقبل فرعاً شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

ب- إنشاء المنحنى (C_f)



التمرين 12

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=\frac{1-4\cos^2x}{4\cos x}$ و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

2) أ- بين أن f دالة زوجية.

ب- بين أن 2π دور للدالة f.

3) ادرس تغيرات f على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$

4) احسب $f''(x)$ لكل x من $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$، ثم استنتج تقعر (C_f).

5) مثل مبيانيا الدالة f على $[-2\pi;2\pi]\cap D_f$.

الحل

1) تحديد مجموعة تعريف الدالة f

f معرفة إذا وفقط إذا كان $\cos x \neq 0$

وبما أن حلول المعادلة $cosx=0$ في IR هي $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث $k \in ZI$.

فإن: $D_f = IR - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in ZI\right\}$

2) أ– لنبين أن f دالة زوجية

ليكن x عنصرا من D_f إذن $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

– إذا كان: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ فإن: $-x = -\frac{\pi}{2} - k\pi = \pi - \frac{\pi}{2} - k\pi - \pi = \frac{\pi}{2} - (k+1)\pi$ –

إذا كان: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ فإن: $-x \neq \frac{\pi}{2} + k'\pi$ (حيث: $k'=-(k+1)$

ولدينا: $f(-x) = \frac{1 - 4\cos^2(-x)}{4\cos(-x)} = \frac{1 - 4\cos^2 x}{4\cos x}$ (لأن الدالة cos دالة زوجية)

إذن لكل x من D_f ; $(-x) \in D_f$ و $f(-x)=f(x)$ ، وبالتالي f دالة زوجية.

ب– لنبين أن 2π دور للدالة f

ليكن x من D_f، $(x + 2\pi) \in D_f$ (تحقق من ذلك)

و $f(x + 2\pi) = \frac{1 - \cos^2(x + 2\pi)}{4\cos(x + 2\pi)} = \frac{1 - \cos^2 x}{4\cos x}$ (لأن الدالة cos دورية دورها 2π)

إذن 2π دور للدالة f.

3) دراسة تغيرات الدالة f.

ليكن x عنصرا من D_f ،

$$f'(x) = \left(\frac{1 - 4\cos^2 x}{4\cos x}\right)' = \left(\frac{1}{4\cos x} - \cos x\right)' = \sin x\left(\frac{1}{4\cos^2 x} + 1\right)$$

إذن: $f'(x) = \sin x\left(\frac{1}{4\cos^2 x} + 1\right)$ لكل x من D_f.

لدينا: $f(0) = -\frac{3}{4}$ و $f(\pi) = \frac{3}{4}$

و $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} f(x) = -\infty$ (لأن $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \cos x = 0^-$) و $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x) = +\infty$ (لأن $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \cos x = 0^+$)

ومنه جدول تغيرات الدالة f هو التالي:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
f	$-\frac{3}{4}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{3}{4}$

4) حساب $f''(x)$ واستنتاج تقعر منحنى f

ليكن x عنصرا من $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$

$$f''(x)=\left(\sin x\left(\frac{1}{4\cos^2x}+1\right)\right)'$$

$$=\cos x\left(\frac{1}{4\cos^2x}+1\right)+\sin x\left(\frac{\sin x}{2\cos^3x}\right)$$

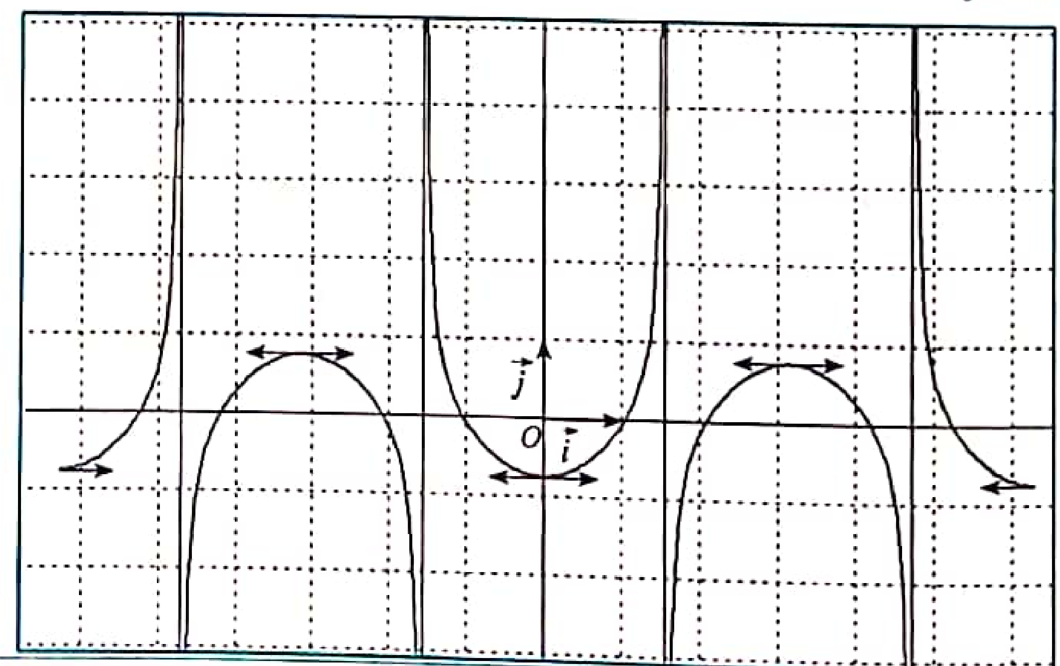
إذن: $f''(x)=\frac{1+\sin^2x+4\cos^4x}{4\cos^3x}$ لكل x من $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$

وبما أن $1+\sin^2x+4\cos^4x>0$ و $4\cos^2x>0$ فإن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $\cos x$

إذن إذا كان x عنصرا من $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ فإن $f''(x)>0$، ومنه (C) موجهة نحو الأراتيب الموجبة.

وإذا كان x عنصرا من $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$ فإن تقعر المنحنى (C) موجه نحو الأراتيب السالبة

5) منحنى الدالة f





التمرين 13

1) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي: $f(x)=a\cos^2x+b\cos x+c$

حيث a و b و c أعداد حقيقية.

وليكن (C_f) منحنى الدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث منحنى الدالة f يحقق الشرطين التاليين:

- (C_f) يمر من النقطتين $E(0;-3)$ و $F\left(\frac{\pi}{2};1\right)$.
- ميل مماس المنحنى (C_f) في النقطة التي أفصولها $\frac{\pi}{2}$ هو 2.

2) لتكن g الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي: $g(x)=-2\cos^2x-2\cos x+1$

أ- بين أن العدد 2π دور للدالة f

ب- ادرس زوجية الدالة g.

ج- ادرس تغيرات الدالة g على المجال $[o;\pi]$.

د- أنشىء منحنى الدالة g على المجال $[-\pi;2\pi]$.

الحل

1) تحديد الأعداد الحقيقية a و b و c:

ليكن x من IR، لدينا: $f(x)=a\cos^2x+b\cos+c$

- لدينا: $E(0;-3)$ من (C_f)، إذن: $f(0)=-3$ ، ومنه: $a\cos^2 0+b\cos 0+c=-3$

أي: $a+b+c=-3$

- لدينا: $F\left(\frac{\pi}{2};1\right)$ من (C_f)، إذن: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ ، ومنه: $a\cos^2\frac{\pi}{2}+b\cos\frac{\pi}{2}+c=1$ ، أي: $c=1$

- ميل المماس للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f في النقطة التي أفصولها $\frac{\pi}{2}$ هو -1،

إذن: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$

لدينا: f دالة قابلة للاشتقاق على IR، و $(\forall x\in IR);\ f'(x)=-2a\sin x\cos x-b\sin x$

$$=-\sin x(2a\cos x+b)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1 \iff -\sin\frac{\pi}{2}\left(2a\cos\frac{\pi}{2}+b\right)=2$$
$$\iff b=-2$$

تذكر أن:

$(\cos)'(x)=-\sin x$ و $(u^2)'=2u'u$

لدينا: $\begin{cases} a+b+c=-3 \\ c=1 \\ b=-2 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \\ c=1 \end{cases}$

وبالتالي: $f(x)=-2cos^2x-2cosx+1$

2) أ- لنبين أن 2π دور للدالة g.

الدالة: $x \mapsto -2\cos^2 x$ دالة دورية و 2π دور لها

والدالة: $x \mapsto -2\cos x-1$ دالة دورية و 2π دور لها

لنبين أن 2π دور للدالة g.

ليكن x من IR، لدينا: $(x+2\pi)$ من IR

و $g(x+2\pi)=-2\cos^2(x+2\pi)-2\cos(x+2\pi)-1=-2\cos^2 x-2\cos x+1=g(x)$

إذن الدالة g تحقق ما يلي:

و $\begin{cases} (\forall x \in D_g);(x+2\pi) \in D_g \\ (\forall x \in D_g);\ g(x+2\pi)=g(x) \end{cases}$ إذن 2π دور للدالة g

ب- لنبين أن g دالة زوجية:

لكل x من IR، لدينا $(-x)$ من IR. و $g(-x)=-2cos^2(-x)-2cos(-x)+1$

وبما أن الدالة $x \mapsto \cos x$ زوجية، فإن: $(\forall x \in IR)\ g(-x)=g(x)$

إذن الدالة g تحقق ما يلي: $\begin{cases} (\forall x \in D_g);(-x \in D_g) \\ (\forall x \in D_g);g(-x)=g(x) \end{cases}$

وبالتالي: g دالة زوجية.

ج- دراسة تغيرات الدالة g على المجال $[0;\pi]$

لدينا، الدالة g دالة دورية، إذن: يكفي دراستها على مجال سعته 2π، مثلا $[-\pi;\pi]$

وبما أن g دالة زوجية، فيكفي دراستها على المجال $[0;\pi]$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $[0;\pi]$ (مجموع دوال قابلة للاشتقاق على $[0;\pi]$)

ولدينا: $(\forall x \in IR); g'(x)=2\times 2\sin x.\cos x+2\sin x$
$=2\sin x(2\cos x+1)$

ليكن x من المجال $[0;\pi]$، لدينا $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ أو $\cos x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x = \sin 0 = \sin\pi$ أو $\cos x = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x = 0$ أو $x = \pi$ أو $x = \frac{2\pi}{3}$

تذكر أن:

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ أو $x = -a + 2k\pi \ / k \in \mathbb{Z}$

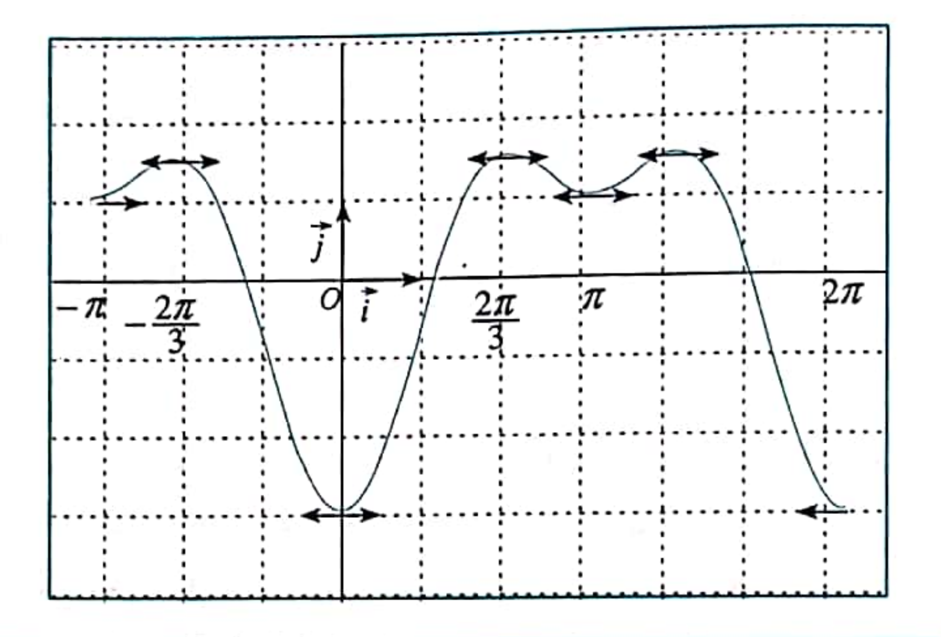
$\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ أو $x = \pi - a + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$

جدول تغيرات الدالة g على المجال $[0;\pi]$ هو كالتالي:

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\sin x$		$+$	|	$+$	
$2\cos x+1$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	-3	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1

د- منحنى الدالة g على المجال $[-\pi, 3\pi]$

ننشىء أولا منحنى قصور الدالة g على المجال $[0;\pi]$ ونستعمل التماثل المحوري لإنشاء منحنى الدالة g على المجال $[-\pi;0]$، ثم نستعمل دورية الدالة g لإتمام إنشاء منحنى الدالة g على المجال $[-\pi, 2\pi]$



التمرين 14

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 1 وعلى اليمين في -1،

وعلى اليسار في 0، ثم أول النتائج المحصل عليها.

3) احسب $f'(x)$ لكل x من $]-1;0[\cup]1,+\infty[$

4) ضع جدول تغيرات الدالة f.

5) ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f).

6) أنشئ (C_f).

الحل

1) لنحدد D مجموعة تعريف الدالة f.

ليكن x عنصرا من IR، لدينا x عنصر من D يعني أن: $x^3 - x \geq 0$

أي: $x(x-1)(x+1) \geq 0$ لندرس إشارة $x(x-1)(x+1)$ باستعمال جدول الإشارات التالي:



x	$-\infty$ -1 0 1 $+\infty$			
x	$-$	$-$ 0	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$ 0	$+$
$x+1$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$
x^3-x	$-$ 0	$+$ 0	$-$ 0	$+$

إذن $x \in D$ يكافيء $x \in [-1;0] \cup [1;+\infty[$، أي: $D = [-1;0] \cup [1;+\infty[$

2) دراسة قابلية اشتقاق f على اليمين في 1

ليكن x عنصرا من $]1;+\infty[$

لدينا: $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{\sqrt[3]{x^3-x}}{x-1} = \sqrt[3]{\dfrac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)^3}} = \sqrt[3]{\dfrac{x(x+1)}{(x-1)^2}}$

إذن: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \sqrt[3]{\dfrac{x(x+1)}{(x-1)^2}} = +\infty$

لأن: $\lim\limits_{x \to 1} x(x+1) = 2$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

إذا كان: $x \geq 0$ فإن: $X = \sqrt[3]{X^3}$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة $x_0=1$

و (C_f) يقبل نصف مماس في النقطة ذات الأفصول 1 مواز لمحور الأراتيب

– دراسة قابلية اشتقاق الدالة على اليمين في $x_0=-1$

ليكن x عنصرا من $]-1;0[$،

لدينا: $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \sqrt[3]{\dfrac{x^3-x}{(x+1)^3}} = \sqrt[3]{\dfrac{x(x-1)}{(x+1)^2}}$

إذن: $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} \sqrt[3]{\dfrac{x(x-1)}{(x+1)^2}} = +\infty$

(لأن: $\lim\limits_{x \to -1}(x(x-1)) = 2$ و $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} \dfrac{1}{(x+1)^2} = +\infty$)

ومنه f غير قابلة للاشتقاق في $x_1=-1$ على اليمين و (C_f) يقبل نصف مماس مواز لمحور الأراتيب في النقطة ذات الأفصول -1

– دراسة اشتقاق الدالة f على اليسار في 0،

إذا كان: $x \leqslant 0$ فإن: $X = -\sqrt[3]{-X^3}$

ليكن x عنصرا من $]-1;0[$

لدينا: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{\sqrt[3]{x^3-x}}{x} = -\sqrt[3]{\dfrac{x^3-x}{-x^3}} = -\sqrt[3]{\dfrac{1-x^2}{x^2}}$

إذن: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to \\ x<0}} \left(-\sqrt[3]{\dfrac{1-x^2}{x^2}}\right) = -\infty$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة $x_2=0$ ، و (C_f) يقبل نصف مماس في النقطة ذات الأفصول 0 مواز لمحور الأراتيب.

3) حساب $f\,'(x)$

ليكن x عنصرا من $]-1;0[\cup]1;+\infty[$، لدينا: $f\,'(x) = \left(\sqrt[3]{x^3-x}\right)' = \dfrac{3x^2-1}{3\sqrt{(x^3-x)^2}}$

إذن: $f\,'(x) = \dfrac{3x^2-1}{3\sqrt[3]{(x^3-x)^2}}$ لكل x من $]-1;0[\cup]-1;+\infty[$

4) جدول تغيرات الدالة f

إشارة $f\,'(x)$ هي إشارة $3x^2-1$

إذن: $-1 < x < -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ أو $x>1$ $\Longleftrightarrow f\,'(x) > 0$

$-\dfrac{\sqrt{3}}{3} < x < 0$ $\Longleftrightarrow f\,'(x) < 0$

لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3-x} = +\infty$ $\quad f(1)=f(-1)=f(0)=0$

ومنه جدول تغيرات الدالة f هو كالتالي:

x	-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$	//////	$+\infty$	$+$	
f	0	↗	$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	↘	0	//////	0	↗	$+\infty$

$f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt[3]{\dfrac{2\sqrt{3}}{9}}$

5) دراسة الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f)

لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، لنحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

ليكن x من $[1;+\infty[$ ، لدينا: $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt{x^3-x}}{x} = \sqrt[3]{\dfrac{x^3-x}{x^3}} = \sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x^2}}$ (لأن $x>0$)

إذن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} = 1$

- لنحسب أيضا: $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)-x)$

ليكن x من $]1; +\infty[$،

لدينا: $$\sqrt[3]{x^3-x}-x=\frac{\left(\sqrt[3]{x^3-x}-x\right)\left(\left(\sqrt[3]{(x^3-x)}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3-x}+x^2\right)}{\sqrt[3]{(x^3-x)^2}+x\sqrt[3]{x^3-x}+x^2}$$

$$=\frac{-x}{\sqrt[3]{(x^3-x)^2}+x\sqrt[3]{x^3-x}+x^2}=\frac{-1}{x\left(\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

تذكر أن:
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

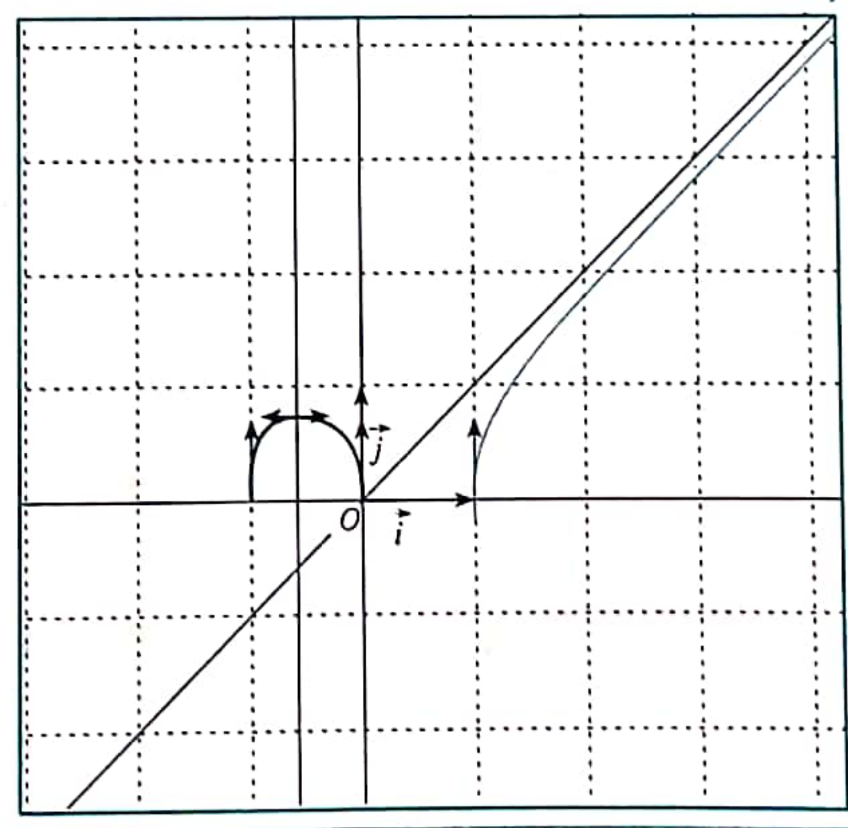
لاحظ أن $$\sqrt[3]{(x^3-x)^2}=\sqrt[3]{\left(x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right)^2}=\sqrt[3]{x^6\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}=x^2\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}$$

إذن: $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x\left(\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0$$

(لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}+1}=-\frac{1}{3}$)

إذن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ مقارب للمنحنى (C_f)

6) المنحنى (C_f)



التمرين 15

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بما يلي: $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2}$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0=0$، ثم أول هندسيا النتائج المحصل عليها.

3) أ- حل في IR المتراجحة: $\sqrt[3]{x^4} + 2x \geq 0$ (ادرس الحالتين $x>0$، ثم $x<0$)

ب- بين أن $f'(x) = \dfrac{3.\sqrt[3]{x^4} + 2x}{3.\sqrt[3]{x^4}}$ لكل من IR^* ثم ضع جدول تغيرات الدالة f.

4) ادرس الفرعين اللانهائيين لمنحنى الدالة f.

5) أنشئ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

الحل

1) حساب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2}$ (لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$) إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ولدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2}\left(1 + \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2}\left(1 - \frac{\sqrt[3]{(-x)^3}}{\sqrt[3]{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2}\left(1 - \sqrt[3]{-x}\right) = -\infty$$

2) لندرس قابلية اشتقاق الدالة f في 0

لدينا: $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x + \sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} 1 + \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} 1 + \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}} = +\infty$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0.

لدينا: $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^-}\left(1 + \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}\right) = \lim\limits_{x\to0^-}\left(1 - \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{-x^3}}\right) = \lim\limits_{x\to0^-}\left(1 - \sqrt[3]{\dfrac{1}{-x}}\right) = -\infty$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 0

التأويل الهندسي.

بما أن $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$ فإن المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عمودي في النقطة 0 موجه نحو الأعلى.

وبما أن $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$ فإن المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عمودي في النقطة 0 موجه نحو الأعلى.

3) أ) لنحل المتراجحة $(E): 3\sqrt[3]{x^4} + 2x \geq 0$

إذا كان: $x>0$ فإن: $3\sqrt[3]{x^4} + 2x > 0$

إذا كان $x \leq 0$ فإن: $3\sqrt[3]{x^4} + 2x \geq 0 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x^4} \geq -2x$

$$\Leftrightarrow \left(3\sqrt[3]{x^4}\right)^3 \geq (-2x)^3$$

$$\Leftrightarrow 27x^4 \geq -8x^3$$

$$\Leftrightarrow x^3(27x+8) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 27x+8 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{8}{27} \quad (x<0 \text{ :لأن})$$

أو $x = 0$

إذن مجموع حلول المتراجحة (E) في $IR^{\bullet}$ هي $S = \left]-\infty; -\frac{8}{27}\right] \cup [0; +\infty[$

ب- لنبين أن: $(\forall x \in IR^{\bullet}); f'(x) = \dfrac{3\sqrt[3]{x^4} + 2x}{3\sqrt[3]{x^4}}$

ليكن x عنصرا من $IR^{\bullet}$، لدينا: $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2}$

نعتبر الدالة العددية g بحيث: $g(x) = \sqrt[3]{x}$، ونعتبر الدالة العددية h بحيث: $h(x)=x^2$

إذن الدالة $t: x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$ هي الدالة المعرفة بما يلي: $t(x)=goh(x)$

ولدينا: $t'(x) = g'(h(x) \times h'(x)$، وبما أن: $h'(x)=2x$ و $g(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

فإن: $t(x) = 2x \times \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$، إذن: $f'(x) = 1 + \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}$

ملحوظة: يمكن استعمال

$\left(\sqrt[3]{u}\right)' = \dfrac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$ ومنه فإن: $(\forall x \in IR^{\bullet}); f'(x) = \dfrac{3\sqrt[3]{x^4} + 2x}{3\sqrt[3]{x^4}}$

جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		$-\frac{8}{27}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	
f	$-\infty$	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0	↗	$+\infty$

4) لندرس الفرعين اللانهائيين لمنحنى الدالة f.

-ليكن x من $]0;+\infty[$ ، لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right)=1$

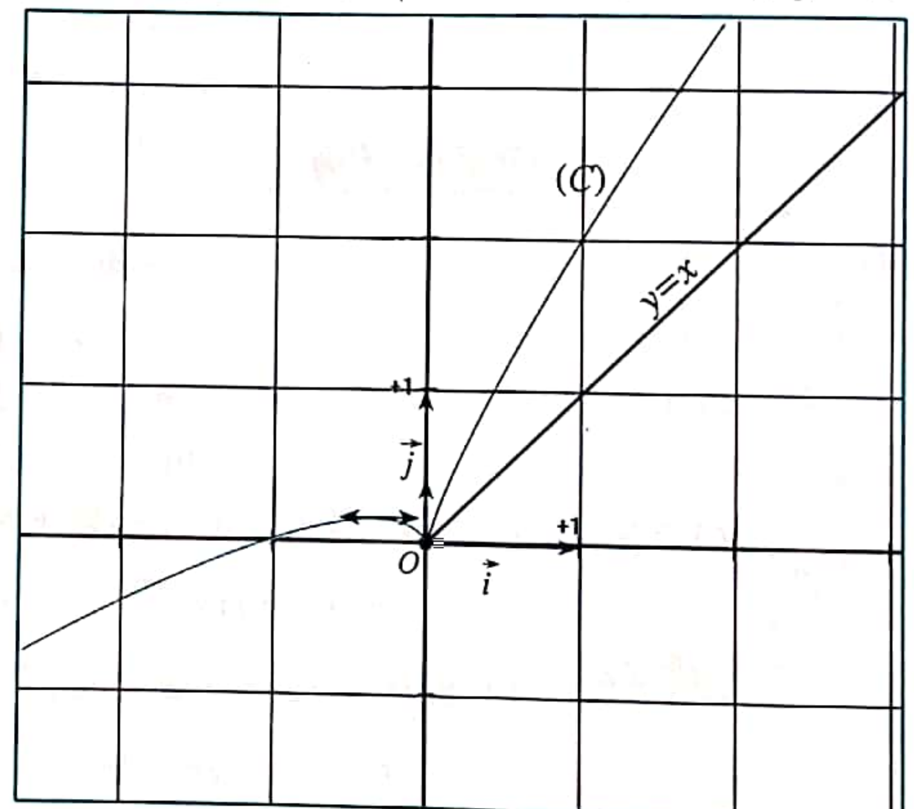
و $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2}=+\infty$

إذن المنحنى C يقبل فرعا شلجميا اتجاه المستقيم الذي معادلته $y=x$ بجوار $+\infty$.

لدينا كذلك: $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{\frac{1}{-x}}\right)=1$

و $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2}=+\infty$

إذن المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجمياً اتجاهه المستقيم الذي معادلته $y=x$ بجوار $-\infty$



التمرين 16

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f

2) احسب $f(0)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

3) أ- ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 0 ، ثم أول مبيانيا هذه النتيجة.

ب- حل في IR: $2-3\sqrt[6]{x}=0$ وتحقق من أن: $2-3\sqrt[6]{x}>0 \iff x\in\left[0;\left(\frac{2}{3}\right)^6\right[$

ج- بين أن $f'(x)=\dfrac{2-3\sqrt[6]{x}}{6\sqrt[6]{x^4}}$

د- أعط جدول تغيرات الدالة f ، (نأخذ: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^6 \simeq 0,08$ و $f\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^6\right) \simeq 0,15$)

4) أ- حدد الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f.

ب- حدد نقط تقاطع (C_f) مع محور الأفاصيل.

ج- أنشئ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

5) أ- لتكن g قصور الدالة f على المجال $I=\left]\left(\dfrac{2}{3}\right)^6;+\infty\right[$

بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من مجال J نحو المجال I

ب- احسب $g(1)$، وبين أن g^{-1} قابلة للاشتقاق في 0.

ج- احسب $(g^{-1})'(0)$.

الحل

1) مجموعة تعريف الدالة f

لدينا: $D_f=[0;+\infty[$

2) حساب $f(0)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

- لدينا: $f(0)=\sqrt[3]{0}-\sqrt{0}=0$

- ليكن x من $]0;+\infty[$، لدينا: $\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}=\sqrt[6]{x^2}-\sqrt[6]{x^3}=\sqrt[6]{x^2}\left(1-\sqrt[6]{x}\right)$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[6]{x^2}\left(1-\sqrt[6]{x}\right)=-\infty$

(لأن: $\lim\limits_{+\infty}\sqrt[6]{x^2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt[6]{x}\right)=-\infty$)



3) أ- دراسة قابلية اشتقاق f على اليمين في 0

ليكن x من $]0;+\infty[$،

لدينا: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x}=\dfrac{\sqrt[6]{x^2}-\sqrt[6]{x^3}}{\sqrt[6]{x^6}}=\dfrac{1}{\sqrt[6]{x^4}}-\dfrac{1}{\sqrt[6]{x^3}}=\dfrac{1}{\sqrt[6]{x^4}}\left(1-\sqrt[6]{x}\right)$

إذن: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{\sqrt[6]{x^4}}\left(1-\sqrt[6]{x}\right)=+\infty$

(لأن: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(1-\sqrt[6]{x}\right)=1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{\sqrt[6]{x^4}}=+\infty$)

إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0.

(C_f) يقبل نصف مماس مواز لمحور الأراتيب في النقطة ذات الأفصول 0



ب- حل المعادلة $2-3\sqrt[6]{x}=0$

- ليكن x من $]0;+\infty[$، لدينا: $2-3\sqrt[6]{x}=0 \Leftrightarrow \sqrt[6]{x}=\frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow x=\left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$S=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^6\right\}$$

- حل المتراجحة $2-3\sqrt[6]{x}>0$

$$2-3\sqrt[3]{x}>0 \Leftrightarrow \sqrt[6]{x}<\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 0\leq x<\left(\frac{2}{6}\right)^6$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[0;\left(\frac{2}{3}\right)^6\right]$$

إذن : $S=\left[0;\left(\frac{2}{3}\right)^6\right]$

ج- تحديد $f'(x)$

ليكن x عنصرا من $]0;+\infty[$،

لدينا: $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)'-\left(\sqrt{x}\right)'$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2-3\sqrt[6]{x}}{6\sqrt[6]{x^4}}$$

إذن: $f'(x)=\frac{2-3\sqrt[6]{x}}{6\sqrt[6]{x^4}}$ لكل x من $]0;+\infty[$

د- جدول تغيرات f

لاحظ أن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $2-3\sqrt[6]{x}$، وانطلاقا من نتيجتي السؤال 3) ب- نستنتج أن:

$$f'\left(\left(\frac{2}{3}\right)^6\right)=0 \text{ و } \left(x\in\left]0,\left(\frac{2}{3}\right)^6\right[\Leftrightarrow f'(x)>0\right)$$

ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة f:

x	0		$\left(\frac{2}{3}\right)^6$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\| +\infty$	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{2}{3}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

4) أ– تحديد الفرع اللانهائي.

لدينا $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

ليكن x عنصرا من $]0; +\infty[$

لدينا: $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt[6]{x^4}} - \frac{1}{\sqrt[6]{x^3}}$

إذن: $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[6]{x^4}} - \frac{1}{\sqrt[6]{x^3}}\right) = 0$

ومنه منحنى الدالة f يقبل فرعا شلجميا اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

ب– تحديد تقاطع (C_f) مع محور الأفاصيل:

ليكن x عنصرا من $[0; +\infty[$،

لدينا: $\sqrt[3]{x} - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[6]{x^2} - \sqrt[6]{x^3} = 0$

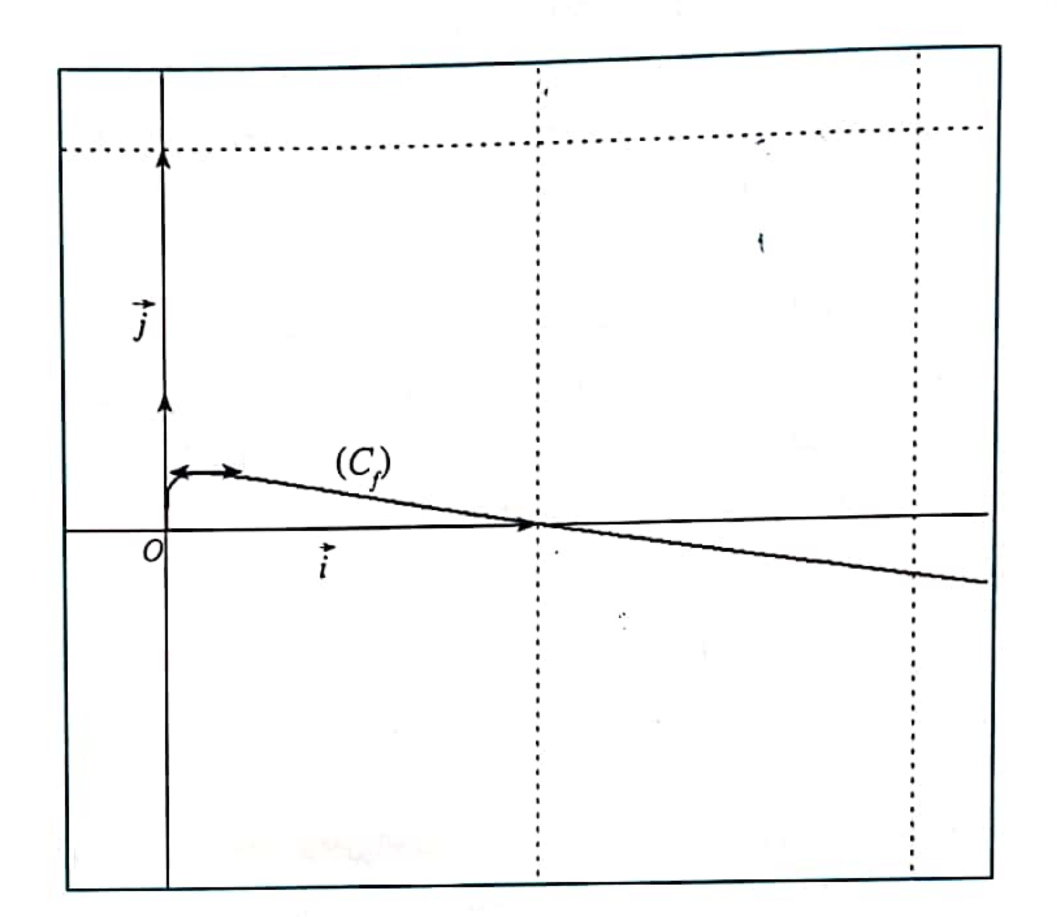
$\Leftrightarrow \sqrt[6]{x^2}\left(1 - \sqrt[6]{x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt[6]{x^2} = 0$ أو $\sqrt[6]{x} = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$ أو $x=1$

إذن (C_f) يقطع محور الأفاصيل في النقطتين $O(0,0)$ و $A(1;0)$

ج- المنحنى



5) أ- لنبين أن g تقابل من I نحو مجال J

لدينا g متصلة على المجال I لأنها مجموع دالتين متصلتين على I هما $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ و $x \mapsto -\sqrt{x}$

ولدينا g تناقصية قطعا على المجال I (انظر جدول تغيرات f)

إذن g تقبل دالة عكسية من I نحو $J = \left]-\infty; f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^6\right)\right[$.

ب- • حساب $g(1)$

لدينا $g(1)=f(1)=0$

- بما أن g^{-1} هي الدالة العكسية للدالة g، و g' لا تنعدم على I ، فإن g^{-1} قابلة للاشتقاق على J ، وبالتالي g^{-1} قابلة للاشتقاق في 0 لأن 0 عنصر من J.

ج- لنحسب $(g^{-1})'(0)$

$$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(0))} = \frac{1}{g'(1)}$$

وبما أن: $g'(1) = f'(1) = -\frac{1}{6}$

فإن: $(g^{-1})'(0) = -6$

التمرين 16

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي: $f(x)=\sqrt{|x^2-2x-3|}-1$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

2) بين أن المستقيم (d) الذي معادلته $x=1$ محور تماثل للمنحنى (C_f).

3) أ- احسب النهايتين التاليتين: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب- بين أن (C_f) يقبل مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ يجب تحديده.

ج- بين أنه لكل x من $]3;+\infty[$: $f(x)-x+2<0$. ماذا تستنتج؟

4) أ- بين أن f قابلة للاشتقاق على $IR-\{-1;3\}$

ب- بين أن
$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}} & ;x\in]3;+\infty[\\ f'(x)=\dfrac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} & ;x\in[1;3[\end{cases}$$

ج- ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين وعلى اليسار في 3، ثم أول كل نتيجة هندسيا.

د- ضع جدول تغيرات الدالة f على المجال $[1;+\infty[$

5) أنشئ المنحنى (C_f).

6) ليكن g قصور الدالة f على $]-\infty;-1]$.

أ- بين أن g تقبل دالة عكسية معرفة من مجال J يتم تحديده نحو المجال $]-\infty;-1]$

ب- أنشئ بلون مختلف $(C_{g^{-1}})$ في نفس المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

ج- حدد $g^{-1}(x)$ بدلالة x.

الحل

لدينا: $f(x)=\sqrt{|x^2-2x-3|}-1$

1) لنحدد D_f: $D_f=IR$ (لأن: $|x^2-2x-3|\geq 0$ لكل x من IR).

2) **لنبين أن المستقيم (d) الذي معادلته: $x=1$ محور تماثل (C_f)**



تذكر:

يكون المستقيم الذي معادلته $x=a$ محور تماثل منحنى دالة f إذا وفقط إذا كان:
$$\begin{cases} (\forall x\in D_f);\ (2a-x)\in D_f \\ (\forall x\in D_f);\ f(2a-x)=f(x) \end{cases}$$

ليكن x عنصراً من D_f

لدينا: $(2-x) \in D_f$ لأن $D_f=IR$

و: $f(2-x) = \sqrt{|(2-x)^2 - 2(2-x) - 3|} - 1 = \sqrt{|4 - 4x + x^2 - 4 + 2x - 3|} - 1$

$$= \sqrt{|x^2 - 2x - 3|} - 1 = f(x)$$

إذن المستقيم (d) محور تماثل منحنى الدالة f.

3) أ– لنحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

• لدينا: $\lim\limits_{|x| \to +\infty} (x^2 - 2x - 3) = \lim\limits_{|x| \to +\infty} x^2 = +\infty$

إذن: $\lim\limits_{x \to +\infty} |x^2 - 2x - 3| = +\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \sqrt{|x^2 - 2x - 3|} = +\infty$

وبالتالي: $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، أي: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

ب– لنبين أن (C_f) يقبل مقارباً مائلاً بجوار $+\infty$

لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، لنحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

نلاحظ أن:

$|x^2 - 2x - 3| = (x+1)(x-3) \geq 0$، لكل x من IR و $x \geq 3$

بجوار $+\infty$ يمكن اعتبار $x \geq 3$ ، وفي هذه الحالة: $(x+1)(x-3) \geq 0$

ومنه: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3} - 1$ إذن: $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} - \frac{1}{x}$

وبالتالي: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

لنحسب: $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$

ليكن x من $]3; +\infty[$، لدينا:

$$f(x) - x = \sqrt{x^2 - 2x - 3} - 1 - x = \frac{(x^2 - 2x - 3) - (1+x)^2}{\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 1 + x}$$

$$= \frac{-4x - 4}{\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 1 + x} = \frac{-4 - \frac{4}{x}}{\sqrt{1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} + \frac{1}{x} + 1}$$

بما أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-4 - \frac{4}{x}\right) = -4$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} + \frac{1}{x} + 1 = 2$

فإن: $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = -2$

وبالتالي منحنى الدالة f يقبل مقارباً مائلاً (Δ) معادلته $y=x-2$ بجوار $+\infty$.

ج– لنبين أن: $(\forall x \in [3;+\infty[); f(x) - x + 2 < 0)$

ليكن x عنصراً من المجال $[3;+\infty[$،

لدينا: $f(x) - x + 2 = \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 1 - x = \dfrac{-4}{\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 1 + x}$

وبما أن: $x \geq 3$ فإن: $-1+x>0$ و $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

إذن: $(\forall x \in [3;+\infty[); f(x) - x + 2 < 0)$

الاستنتاج: لدينا: $(\forall x \in [3;+\infty[); f(x) - (x-2) < 0)$

إذن منحنى الدالة f يوجد تحت المقارب المائل (Δ) على المجال $[3;+\infty[$.

4) أ– لنبين أن f قابلة للاشتقاق على كل مجال ضمن D_f.

x	$-\infty$ $\quad$ -1	-1 $\quad$ 3	3 $\quad$ $+\infty$
$\lvert x^2 - 2x - 3\rvert$	x^2-2x-3 $\;0$	$-x^2+2x+3$ $\;0$	x^2-2x-3

على المجال $]-\infty;-1[$، لدينا: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3} - 1$

• الدالة: $u: x \mapsto x^2 - 2x - 3$ قابلة للاشتقاق وموجبة قطعاً على $]-\infty;-1[$

إذن الدالة $v: x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty;-1[$

• الدالة: $w: \mapsto -1$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty;-1[$

إذن الدالة: $f=v+w$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty;-1[$.

نعلل بنفس الطريقة قابلية اشتقاق الدالة f على كل من المجالين $]-1;3[$ و $]3;+\infty[$.

ب– لنحسب $f'(x)$ لكل x من $]3;+\infty[\cup]1;3[$

• إذا كان x عنصرا من $]-1;3[$ ، فإن: $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} - 1$

إذن: $f'(x) = \dfrac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} = \dfrac{-x+1}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}$

• إذا كان x عنصرا من $]3;+\infty[$، فإن: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3} - 1$

إذن: $f'(x) = \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$

ومنه: $\begin{cases} f'(x) = \dfrac{-x+1}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}; x \in [1;3[\\ f'(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}; x \in]3;+\infty[\end{cases}$



ج- لندرس قابلية اشتقاق f على اليمين وعلى اليسار في 3

• ليكن x عنصراً من المجال $]-1;3[$ ،

لدينا: $\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{\sqrt{-x^2+2x+3}}{x-3} = \frac{-(x+1)(x-3)}{(x-3)\sqrt{-x^2+2x+3}} = \frac{-x-1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$

وبما أن: $\lim_{x\to 3}(-x-1) = -4$ و $\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\sqrt{-x^2+2x+3} = 0^+$

فإن: $\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = -\infty$ ، ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 3 ومنحنى f يقبل نصف مماس مواز لمحور الأراتيب في النقطة $A(3;-1)$ (موجه نحو الأراتيب الموجبة).

- ليكن x عنصراً من المجال $]3;+\infty[$،

لدينا: $\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x-3} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$

وبما أن: $\lim_{x\to 3}(x+1) = 4$ و $\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\sqrt{x^2-2x-3} = 0^+$ فإن: $\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = +\infty$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 3 ومنحنى الدالة f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأراتيب في النقطة A (وهو موجه نحو الأراتيب الموجبة).

د- جدول تغيرات f على المجال $]1;+\infty[$.

• إذا كان: $x>3$ فإن: $x-1>0$ ، ومنه: $f'(x)>0$ ، إذن f تزايدية قطعا على المجال $]3;+\infty[$.

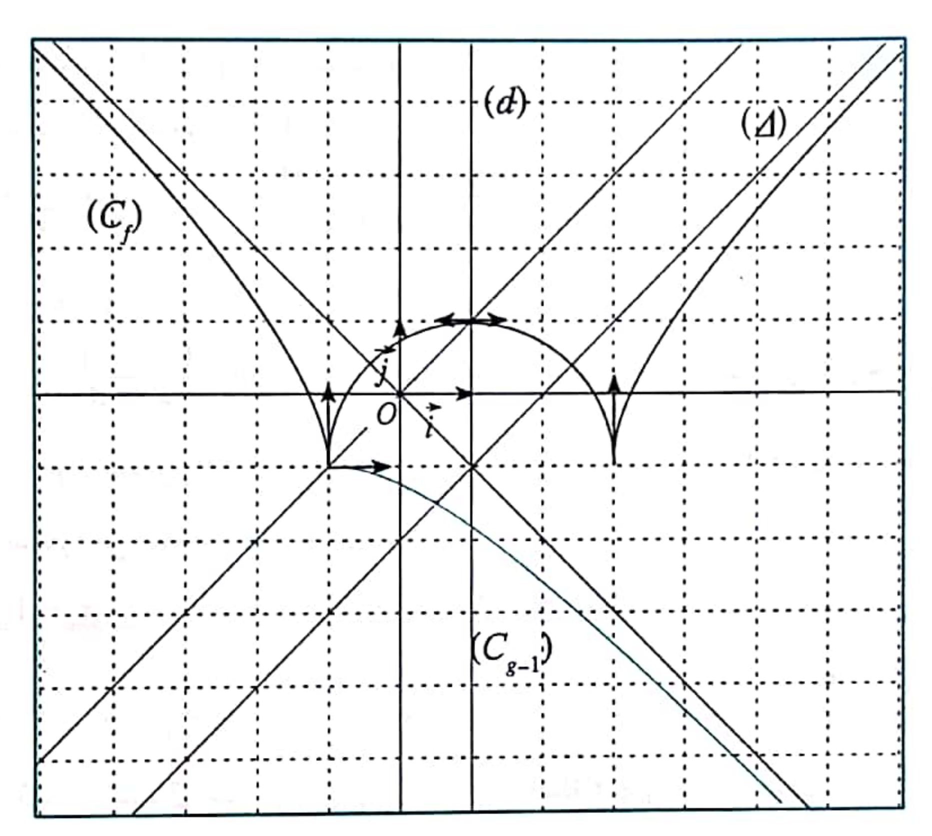
• إذا كان: $1 \leq x < 3$ فإن: $-x+1\leq 0$ ، ومنه: $f'(x)\leq 0$ ، إذن f تناقصية قطعاً على المجال $[1;3]$.

ومنه جدول تغيرات f على $]1;+\infty[$ هو كالتالي:

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	
f	1	↘	-1	↗	$+\infty$

5) إنشاء منحنى الدالة f

المستقيم (d) الذي معادلته $x=1$ محور تماثل المنحنى. ننشئ أولاً منحنى الدالة f على المجال $]1;+\infty[$، ثم ننشئ مماثل هذا المنحنى بالنسبة للمستقيم (d):



6) أ– لنبين أن g تقبل دالة عكسية.

لدينا g قصور الدالة f على المجال $]-\infty; -1]$. بما أن f قابلة للاشتقاق على $]-\infty; -1]$ فإنها متصلة على هذا المجال، وبما أن: $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -1 = f(-1)$ فإن f متصلة على اليسار في -1 وبالتالي الدالة g متصلة على المجال $]-\infty; -1]$. وبما أن g تناقصية قطعاً على المجال $]-\infty; -1]$ فإن g^{-1} تقبل دالة عكسية معرفة على المجال J حيث: $J = g(]-\infty; -1]) = [-1; +\infty[$.

ب– إنشاء منحنى الدالة العكسية g^{-1}

منحنى الدالة g^{-1} هو مماثل منحنى الدالة g بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=x$ (المنصف الأول للمعلم)، (انظر الشكل).

ج– لنحدد $g^{-1}(x)$ لكل x من $[-1; +\infty[$

ليكن x عنصراً من المجال $[-1; +\infty[$، نضع $g^{-1}(x)=y$ حيث $y \in]-\infty; -1]$

$$\begin{aligned} g^{-1}(x) = y &\iff g(y) = x \\ &\iff \sqrt{y^2 - 2y - 3} - 1 = x \\ &\iff y^2 - 2y - 3 = (x+1)^2 \\ &\iff (y-1)^2 = 4 + (x+1)^2 \\ &\iff |y-1| = \sqrt{x^2 + 2x + 5} \\ &\iff y = 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 5} \end{aligned}$$



(لأن: $y-1<0$)

إذن: $(\forall x \in [-1; +\infty[); g^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 5}$

التمرين 18

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ بمايلي: $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) تحقق من أن f دالة فردية ثم احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ ثم أعط تأويلا هندسيا لكل من النتيجتين المحصل عليهما.

3) بين أنه لكل x من $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$، لدينا: $f'(x) = \dfrac{x^2-3}{3.\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$ ثم استنتج تغيرات الدالة f.

4) بين أنه لكل x من $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$، لدينا: $f''(x) = \dfrac{2x(9-x^2)}{9.\sqrt[3]{(x^2-1)^7}}$

ثم استنتج أن (C) يقبل نقطتي انعطاف ينبغي تحديد زوجي إحداثيتيهما.

5) ارسم المنحنى (C).

الحل

1) لنتحقق من أن f دالة فردية ولنحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

لدينا $D_f = \{x \in IR / x^2 - 1 > 0\}$ ومنه: $D_f =]-\infty; -1[\cup]1, +\infty[$

لكل x من D_f لدينا $(-x) \in D_f$ و $f(-x) = \dfrac{-x}{\sqrt[3]{(-x)^2-1}} = \dfrac{-x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = -f(x)$

إذن f دالة فردية.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3}{x^2-1}}$$

وبما أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ فإن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{x^3}{x^2-1}} = +\infty$

2) لنحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x)$ ثم نعطي تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما.

لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x\sqrt[3]{x^2-1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

إذن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ (لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2-1) = +\infty$)

ومنه فإن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

لدينا كذلك: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} x = 1$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x^2 - 1) = 0^+$ ، إذن: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$

ومنه المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى (C).

3) لنبين أن $f'(x) = \dfrac{x^2 - 3}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$ ، لكل x من $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ ثم نستنتج تغيرات f.

ليكن x من المجموعة $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$،

لدينا:
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

و
$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1} - x \times 2x \times \frac{1}{3} \times (x^2 - 1)^{\frac{-2}{3}}}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1} - \frac{2x^2}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}$$

$$= \frac{3(x^2 - 1) - 2x^2}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$$

إذن:
$$f'(x) = \frac{x^2 - 3}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$$

لنضع جدول تغيرات الدالة f (بما أن f فردية، فإنها تحافظ على الرتابة في مجالين متماثلتين بالنسبة للصفر)

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1		1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖ ////// ‖	$-$	0	$+$
f	$-\infty$ ↗	$\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$	↘ $-\infty$	‖ ////// ‖	$+\infty$ ↘	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$	↗ $+\infty$

4) لنبين أن $f''(x) = \dfrac{2x(9 - x^2)}{9\sqrt[3]{(x^2 - 1)^7}}$ لكل x من $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

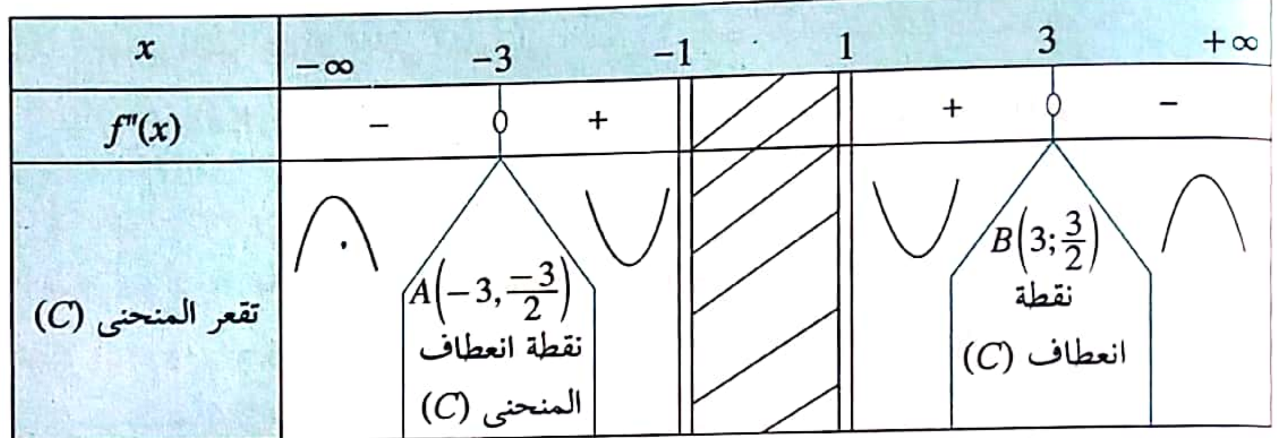
لدينا: $f'(x) = \dfrac{x^2 - 3}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$، ومنه:

$$f''(x) = \frac{1}{3}\left[\frac{2x\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4} - \frac{4}{3}2x(x^2 - 1)^{\frac{1}{3}} \times (x^2 - 3)}{\sqrt{(x^2 - 1)^8}}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{3 \times 2x(x^2 - 1)\sqrt[3]{x^2 - 1} - 8x(x^2 - 3)\sqrt[3]{x^2 - 1}}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^8}}\right]$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1}\left(6x(x^2 - 1) - 8x(x^2 - 3)\right)}{9\sqrt[3]{(x^2 - 1)^8}} = \frac{2x\left(3(x^2 - 1) - 4(x^2 - 3)\right)}{9\sqrt[3]{(x^2 - 1)^7}} = \frac{2x(9 - x^2)}{9\sqrt[3]{(x^2 - 1)^7}}$$

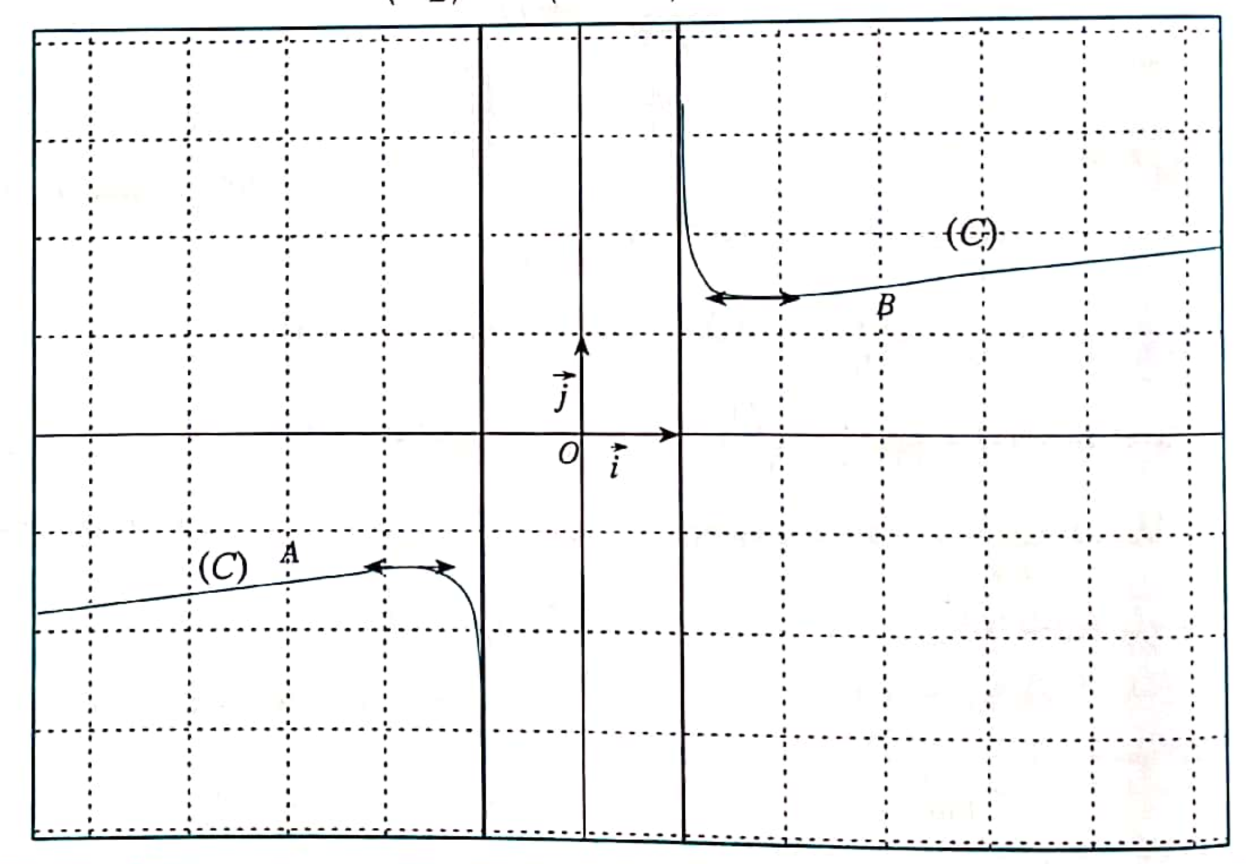
نستنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف.



x	$-\infty$		-3		-1		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	‖	//////	‖	$+$	0	$-$	
تقعر المنحنى (C)		∩	$A\left(-3,\frac{-3}{2}\right)$ نقطة انعطاف المنحنى (C)	∪	‖	//////	‖	∪	$B\left(3;\frac{3}{2}\right)$ نقطة انعطاف (C)	∩	

f'' تنعدم مع تغيير الإشارة عند كل من -3 و 3

إذن المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف هما $A\left(-3;\frac{-3}{2}\right)$ و $B\left(3;\frac{3}{2}\right)$



التمرين 19

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR^+ بمايلي: $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - x$؛

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- تحقق من أن: $f(x) = x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1\right)$ لكل x من IR_+^*؛



ب– احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، وادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C).

2) أ– ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين في الصفر، ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها؛

ب– بين أن $f'(x) = -\dfrac{(\sqrt[3]{x}-1)(3\sqrt[3]{x}+1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$ لكل x من IR_+^*، ثم أعط جدول تغيرات الدالة f.

3) أ– بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1;+\infty[$.

ب– بين أن α يحقق: $\alpha^3 - 4\alpha^2 - \alpha = 0$، ثم استنتج قيمة α .

(تذكر أن: $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$)

4) ارسم المنحنى (C).

5) استنتج مما سبق أنه إذا كان a و b عددين حقيقيين بحيث: $0 < a < \alpha < b$ فإن: $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{1}{3}}} > \dfrac{a}{b}$

الحل

1) أ– لنتحقق من أن: $(\forall x \in IR_+^*)\,;\, f(x) = x\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1\right)$

ليكن x عنصرا من IR_+^*، لدينا:

$$f(x) = x\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} + \frac{\sqrt[3]{x}}{x} - 1\right)$$

$$= x\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} - 1\right) = x\left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} + \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} - 1\right)$$

إذن: $(\forall x \in IR_+^*) f(x) = x\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}} + \sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}} - 1\right) = x\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1\right)$

ب– •حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ليكن x من IR_+^*، لدينا: $f(x) = x\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1\right)$،

بما أن: $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2} = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x})^2 = +\infty$

فإن $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$ ، ومنه فإن: $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1\right) = -1$

إذن: $\lim_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1\right) = -\infty$ ، أي $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

– دراسة الفرع اللانهائي

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} (f(x)+x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}) = +\infty$

فإن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم الذي معادلته $y=-x$ بجوار $+\infty$.

2) أ- دراسة قابلية اشتقاق f على اليمين في 0

ليكن x عنصرا من IR_+^*، لدينا: $f(0)=0$

و $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=\frac{x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1\right)}{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1$

وبما أن: $\lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x}=0^+$ و $\lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x^2}=0^+$ فإن: $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$،

ومنه : $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1\right)=+\infty$

وبالتالي: $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$، إذن الدالة f غير قابلة الاشتقاق على اليمين في 0.

- التأويل الهندسي

المنحنى (C) يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة O موجه نحو الأعلى.

ب- لنبين أن: $f'(x)=-\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(3\sqrt[3]{x}+1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$ لكل x من $]0;+\infty[$

ليكن x عنصرا من $]0;+\infty[$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-1$$
$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\left(\frac{2x}{\sqrt[3]{x^2}}+1-3\sqrt[3]{x^2}\right)$$
$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\left(2\sqrt[3]{x}+1-3\sqrt[3]{x^2}\right)=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\left(3\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}-1\right)$$

وبما أن: $(\sqrt[3]{x}-1)(3\sqrt[3]{x}+1)=3(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x}-1=3\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}-1$

فإن: $f'(x)=-\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(3\sqrt[3]{x}+1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$ لكل x من IR_+^*.

- جدول تغيرات الدالة:

لدينا إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sqrt[3]{x}-1$، أي إشارة $1-x$

(لأن: $1-\sqrt[3]{x}=\frac{1-x}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}$ و $1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}>0$)

ومنه فإن جدول تغيرات f هو كالتالي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖ $+\infty$	$+$	0	$-$	
f	0	↗	1	↘	$-\infty$

3) أ– لنبين أن: $(\exists!\alpha \in [1;+\infty[):f(\alpha)=0$

ليكن g قصور الدالة f على المجال $[1;+\infty[$

لدينا g دالة متصلة وتناقصية قطعا على المجال $[1;+\infty[$، ومنه فإن g تقبل دالة عكسية معرفة على المجال $g([1;+\infty[)$ حيث $g([1;+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} g(x); g(1)\right] =]-\infty;1]$

وبما أن $0 \in]-\infty;1]$ فإنه يوجد α وحيد من $[1;+\infty[$ بحيث: $g(\alpha)=0$، أي: $f(\alpha)=0$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;+\infty[$.

ب– لنبين أن: $\alpha^3-4\alpha^2-\alpha=0$

لدينا: α حل للمعادلة $f(x)=0$، أي: $f(\alpha)=0$، ومنه فإن:

$$f(\alpha)=0 \iff \sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha}-\alpha=0$$
$$\iff \sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha}=\alpha$$
$$\iff \left(\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha}\right)^3=\alpha^3$$
$$\left(\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha}\right)^3=\left(\sqrt[3]{\alpha^2}\right)^3+\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^3+3\sqrt[3]{\alpha^2}\sqrt[3]{\alpha}\left(\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha}\right)$$
$$=\alpha^2+\alpha+3\alpha\left(\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha}\right)$$

وبما أن: $\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha}=\alpha$ فإن: $\left(\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha}\right)^3=\alpha^2+\alpha+3\alpha^2=4\alpha^2+\alpha$

إذن:
$$f(\alpha)=0 \iff 4\alpha^2+\alpha=\alpha^3$$
$$\iff \alpha^3-4\alpha^2-\alpha=0$$

وبالتالي فإن: α يحقق: $\alpha^3-4\alpha^2-\alpha=0$

– استنتاج

لدينا:
$$\alpha^3-4\alpha^2-\alpha=0 \iff \alpha(\alpha^2-4\alpha-1)=0$$
$$\iff \alpha=0 \text{ أو } \alpha^2-4\alpha-1=0$$

ولدينا:
$$\alpha^2-4\alpha-1=0 \iff (\alpha-2)^2=5$$
$$\iff \alpha=2+\sqrt{5} \text{ أو } \alpha=2-\sqrt{5}$$

وبما أن: $\alpha \geq 1$ فإن $\alpha=2+\sqrt{5}$.

5) استنتاج:

لدينا: $(\forall x \in]0;\alpha[);f(x)>0$ و $(\forall x \in]\alpha;+\infty[);f(x)<0$

وبما أن: $0<a<\alpha<b$ فإن: $f(a)>0$ و $f(b)<0$

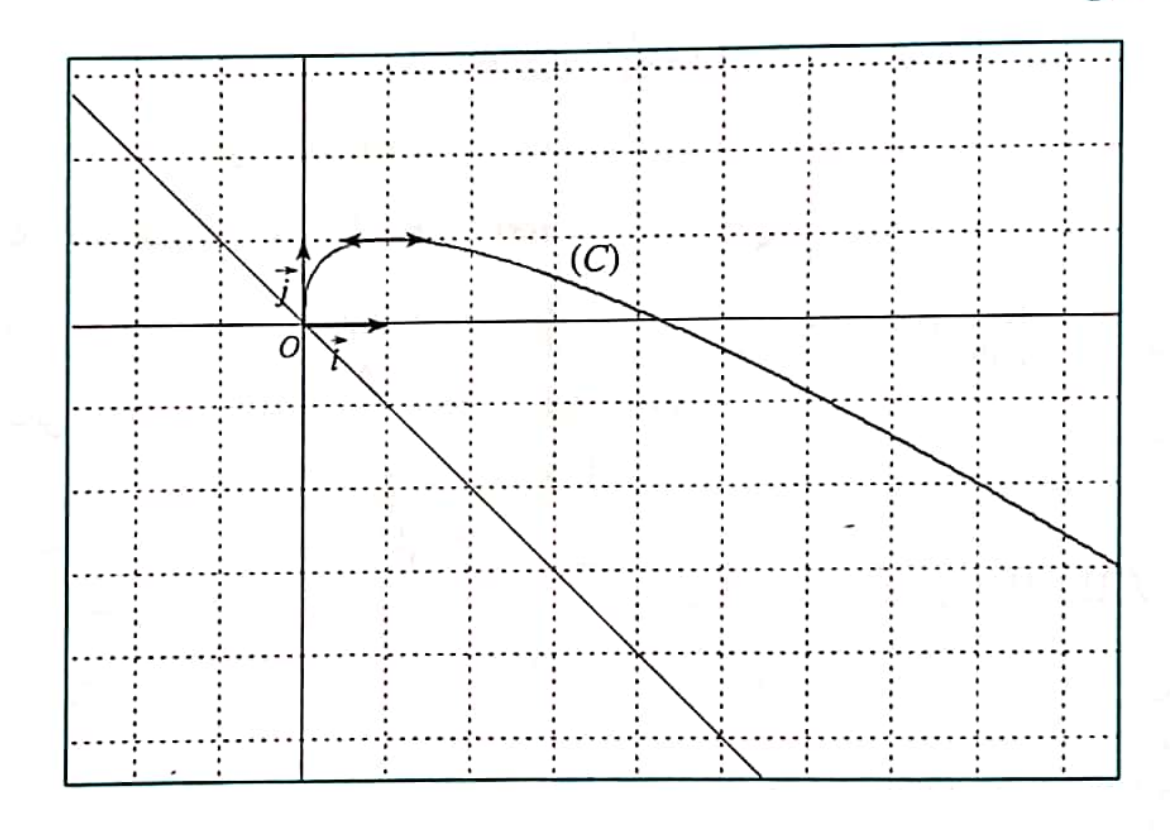
ومنه فإن: $f(a)>0 \iff a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}-a>0$
$$\iff a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}>a \quad (1)$$



$$f(b) < 0 \iff b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{1}{3}} - b < 0$$
$$\iff b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{1}{3}} < b$$
$$\iff \frac{1}{b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} > \frac{1}{b} \quad (2)$$

إذن من (1) و (2) نستنتج أن: $\frac{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} > \frac{a}{b}$

4) المنحنى



التمرين 20

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بمايلي:
$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{1 - x}; x < 1 \\ f(x) = \sqrt[3]{x(x^2 - 1)}; x \geq 1 \end{cases}$$

و (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) بين أن الدالة f متصلة في النقطة $x_0=1$.

2) أ- ادرس قابلية اشتقاق f على اليسار وعلى اليمين في $x_0=1$؛

ب- أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما.

3) أعط جدول تغيرات الدالة f.

4) أ- احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ وأول هندسيا النتيجة المتوصل إليها.

ب- بين أن $\lim_{x \to +\infty}(f(x) - x) = 0$ ، ماذا تستنتج؟

ج- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

د- أنشئ المنحنى (C) (نأخذ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3cm$)

5) بين أن الدالة g قصور الدالة f على المجال $]1; +\infty[$ تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال يتم تحديده، وأنشئ (C_{g-1}) منحنى الدالة g^{-1} في نفس المعلم السابق.

الحل

1) اتصال الدالة f في النقطة $x_0=1$

لدينا: $f(1)=0$ و $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} x\sqrt{1-x} = 0$

و $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \sqrt[3]{x(x^2-1)} = 0 = f(1)$ ، إذن: $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = f(1)$

وبالتالي: $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$ ، إذن: f دالة متصلة في النقطة $x_0=1$.

2) أ- دراسة قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0=1$.

- قابلية اشتقاق f على اليسار في $x_0=1$:

ليكن x عنصرا من المجال $]-\infty; 1[$، لدينا: $\frac{x\sqrt{1-x}}{-(1-x)} = \frac{x\sqrt{1-x}-0}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

إذن: $\frac{-x}{\sqrt{1-x}} = \frac{x\sqrt{1-x}}{-(\sqrt{1-x})^2} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ $(1-x>0)$

ومنه: $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{-x}{\sqrt{1-x}} = -\infty$ (لأن: $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}}(-x) = -1$ و $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}}\sqrt{1-x} = 0^+$)

إذن: الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 1.

- قابلية اشتقاق f على اليمين في $x_0=1$.

ليكن x عنصراً من المجال $]1; +\infty[$،

لدينا: $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{x(x^2-1)}}{x-1}$، وبما أن: $x-1>0$ فإن $x-1 = \sqrt[3]{(x-1)^3}$

ومنه: $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \sqrt[3]{\frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)^3}} = \sqrt[3]{\frac{x(x+1)}{(x-1)^2}}$

وبما أن: $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}}(x+1) = 2$ و $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}}(x-1)^2 = 0^+$ فإن: $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$

ومنه الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 1.

ب- التأويل الهندسي:

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$

ومنه (C) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى على اليمين في النقطة$A(1,0)$.

ولدينا: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$

ومنه (C) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى على اليسار في النقطة $A(1,0)$.

3). جدول تغيرات الدالة f.

ليكن x عنصرا من $]-\infty;1[$ لدينا: $f(x) = x\sqrt{1-x}$

نضع: $u(x)=x$ و $v(x) = \sqrt{1-x}$ ومنه: $f=uv$، إذن f قابلة للاشتقاق لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق.

ولدينا:

$$f'(x) = 1\sqrt{1-x} + x\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2(\sqrt{1-x})^2 - x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$$

إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;1[$ هي إشارة $2-3x$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1
$2-3x$		$+$	0	$-$	

ليكن x عنصراً من المجال $]1;+\infty[$، لدينا: $f(x) = \sqrt[3]{x^3-x}$

الدالة: $x \mapsto x(x^2-1)$ موجبة قطعا وقابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$

إذن الدالة $x \mapsto \sqrt[3]{x^3-x}$ قابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$

لدينا: $\forall x \in]1;+\infty[; f'(x) = \dfrac{3x^2-1}{3\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}}$

تذكر أن:
$(\sqrt[3]{u})' = \dfrac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$

إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;1[$ هي إشارة $3x^2-1$ وبما أن: $1<x$، فإن: $3<3x^2$، ومنه: $3x^2-1>0$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (تحقق من ذلك)

جدول تغيرات الدالة f هو كالتالي:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	
f	$-\infty$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	0	↗	$+\infty$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

4) أ– حساب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ وإعطاء تأويل هندسي:

ليكن $]-\infty;1]$، لدينا: $\frac{f(x)}{x}=\frac{x\sqrt{1-x}}{x}=\sqrt{1-x}$

وبما أن: $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-x}=+\infty$ ، فإن: $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

التأويل الهندسي:

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

إذن منحنى الدالة f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $-\infty$.

ب– لنبين أن: $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$

ليكن x عنصراً من $]1;+\infty[$، لدينا:

$$f(x)-x=\sqrt[3]{x^3-x}-x=\frac{x^3-x-x^3}{(\sqrt[3]{x^3-x})^2+x\sqrt[3]{x^3-x}+x^2}=\frac{-x}{(\sqrt[3]{x^3-x})^2+x\sqrt[3]{x^3-x}+x^2}$$

$$=\frac{-1}{x\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}\right)^2+\sqrt[3]{x^2(x-1)}+x}$$

بما أن: $\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{x^2(x-1)}+x\right)=+\infty$ فإن: $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$

• التأويل الهندسي:

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ وَ $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$

إذن: منحنى الدالة f يقبل مقاربا مائلا معادلته $y=x$ بجوار $+\infty$.

ج– دراسة وضع منحنى الدالة f مع المستقيم الذي معادلته $y=x$:

• على المجال $]1;+\infty[$

ليكن x من $]1;+\infty[$، لدينا: $f(x)-x=\frac{-x}{\left(\sqrt[3]{x^3-x}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3-x}+x^2}$

وبما أن: $\left(\sqrt[3]{x^3-x}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3-x}+x^2>0$ لكل x من المجال $]1;+\infty[$

و $-x<0$ إذن: $f(x)-x<0$ على المجال $]1;+\infty[$

وبالتالي منحنى الدالة f يوجد تحت المستقيم الذي معادلته $y=x$ على المجال $]1;+\infty[$.

• على المجال $]-\infty;1]$

ليكن x من المجال $]-\infty;1]$، لدينا: $f(x)-x=x\sqrt{1-x}-x=x(\sqrt{1-x}-1)$

$$=x\frac{1-x-1}{\sqrt{1-x}+1}=\frac{-x^2}{\sqrt{1-x}+1}$$

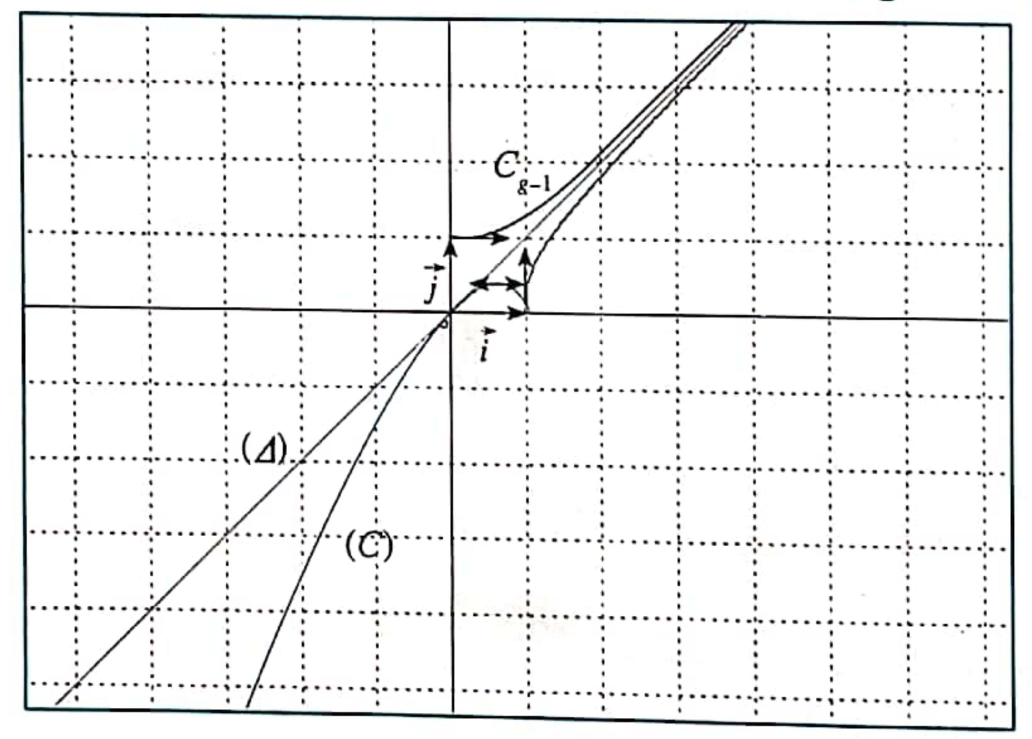
وبما أن: $\sqrt{1-x}+1>0$ و $-x^2\leq 0$ لكل x من المجال $]-\infty;1]$

فإن: $f(x)-x\leq 0$ لكل x من $]-\infty;1]$

الجدول التالي يلخص إشارة: $f(x)-x$ ويحدد وضع منحنى f والمستقيم Δ الذي معادلته $y=x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$-$
الوضع	(C) تحت (Δ)	$O(0,0)$ نقطة من تقاطع (Δ) و (C)	(C) تحت (Δ)

د- إنشاء منحنى f



5) g قصور الدالة f المجال $[1;+\infty[$

لدينا: $(x \mapsto x^3 - x)$ متصلة وموجبة على $[1;+\infty[$ إذن: $x \mapsto \sqrt[3]{x^3 - x}$ متصلة على $[1;+\infty[$

ولدينا: g دالة تزايدية قطعا على المجال $[1;+\infty[$ وبالتالي g تقبل دالة عكسية معرفة على المجال

$$g([1;+\infty[) = \left[g(1); \lim_{x \to +\infty} g(x)\right[= [0;+\infty[$$

إنشاء C_{g-1}: (انظر الشكل)

في المعلم الممنظم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$

C_g و C_{g-1} متماثلان بالنسبة للمنصف الأول للمعلم، أي المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$

التمرين 21

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي: $\begin{cases} f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 - 1} & ; x \geq 1 \\ f(x) = x\sqrt[3]{1 - x} & ; x < 1 \end{cases}$

وليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f.

2) أ- احسب نهايات f عند محدات D؛

ب- ادرس اتصال الدالة f عند النقطة $x_0=1$.

3) احسب $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)}{x - 1}$ و $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{x - 1}$ ، ثم أول مبيانيا هاتين النتيجتين.

4) ادرس تغيرات الدالة f وأعط جدول تغيراتها.

5) ادرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f.

6) أنشئ (C_f).

7) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = [1; +\infty[$

أ- بين أن الدالة g تقبل دالة عكسية معرفة من مجال J يجب تحديده I نحو مجال .

ب- احسب $(g^{-1})'(2)$.

ج- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من المجال J.

د- أنشئ منحنى الدالة g^{-1}.

الحل

1) **تحديد مجموعة تعريف الدالة f:**

ليكن x من IR، لدينا: $x \geq 1$

و $x \in D_1 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0$

إذا كان $x \geq 1$ فإن $x^2 \geq 1$، ومنه $x^2 - 1 \geq 0$

ومنه $D_1 = [1; +\infty[$

ليكن x من IR، $x<1$ و $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \in D_2$

$\Leftrightarrow$ $x<1$ و $x \leq 1$

$\Leftrightarrow D_2 =]-\infty, 1[$

وبما أن: $D = D_1 \cup D_2$ فإن: $D=IR$

تذكر:

إذا كانت $\begin{cases} f(x) = u(x); x \in I \\ f(x) = v(x); x \in J \end{cases}$

وبوضع: $D_1 = D_u \cap I$ و $D_2 = D_v \cap J$

فإن: $D_f = D_1 \cup D_2$

2) أ– تحديد نهايات f محدات D.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+\sqrt{x^2-1}\right) = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\sqrt[3]{1-x} = -\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{1-x} = +\infty$)

ب– دراسة اتصال الدالة f عند النقطة $x_0=1$

لدينا: مجموعة تعريف الدالة f هي IR و $f(1) = 1-1+\sqrt{1^2-1} = 0$

و $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}(x-1+\sqrt{x^2-1}) = 0 = f(1)$ وَ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} x\sqrt[3]{1-x} = 0 = f(1)$

ومنه: $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1)$ ، وبالتالي الدالة f متصلة في النقطة $x_0=1$

2) حساب $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)}{x-1}$

ليكن x من المجال $]1;+\infty[$، لدينا:

$$\frac{f(x)}{x-1} = \frac{x-1+\sqrt{x^2-1}}{x-1} = 1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = 1+\frac{x^2-1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = 1+\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$$

وبما أن: $\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{x^2-1} = 0^+$ و $\lim\limits_{x\to1}(x+1) = 2$ فإن: $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)}{x-1} = +\infty$

• حساب $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)}{x-1}$:

ليكن x من $]-\infty;1[$، لدينا:

$$\frac{f(x)}{x-1} = \frac{x\sqrt[3]{1-x}}{x-1} = \frac{x\sqrt[3]{1-x}\,(\sqrt[3]{1-x})^2}{(x-1)(\sqrt[3]{1-x})^2} = \frac{x(1-x)}{(x-1)(\sqrt[3]{1-x})^2} = \frac{-x}{(\sqrt[3]{1-x})^2}$$

وبما أن: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-}(\sqrt[3]{1-x})^2 = 0^+\\ \text{و}\ \lim\limits_{x\to1^-}(-x) = -1\end{array}\right\}$ فإن: $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)}{x-1} = -\infty$

• التأويل الهندسي:

لدينا: $f(1)=0$ و $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$

إذن: الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة $x_0=1$

و (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى على اليمين في النقطة $A(1,f(1))$

وبما أن: $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$ ، فإن f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة $x_0=1$.

و (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى على اليسار في النقطة $A(1,f(1))$.



4) دراسة تغيرات الدالة f:

الدالة $x \mapsto x^2 - 1$ قابلة للاشتقاق وموجبة قطعا على المجال $]1; +\infty[$

إذن الدالة $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ قابلة للاشتقاق على $]1; +\infty[$

وبالتالي الدالة $x \mapsto x - 1 + \sqrt{x^2 - 1}$ قابلة للاشتقاق على $]1; +\infty[$ (مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق).

و $(\forall x \in]1; +\infty[); f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

وبما أن: $x>1$، فإن: $f'(x) > 0$

وبالتالي الدالة f تزايدية قطعا على $]1; +\infty[$

• الدالة $x \mapsto 1 - x$ قابلة للاشتقاق وموجبة قطعا على المجال $]-\infty; 1[$، $(x < 1 \Rightarrow 1 - x > 0)$

ومنه الدالة: $x \mapsto \sqrt[3]{1 - x}$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty; 1[$

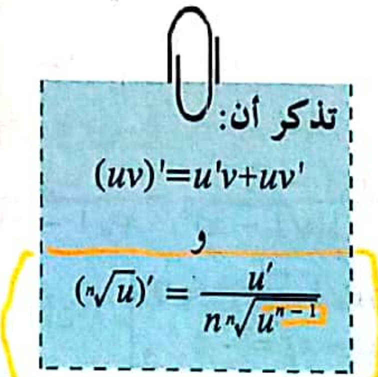
وبالتالي الدالة $x \mapsto x\sqrt[3]{1 - x}$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty; 1[$ (جداء دالتين قابلتين للاشتقاق)

ولدينا: $(\forall x \in]-\infty; 1[); f'(x) = 1\sqrt[3]{1 - x} + x \times \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1 - x)^2}}$

$$= \frac{3\sqrt[3]{(1 - x)^3} - x}{3\sqrt[3]{(1 - x)^2}}$$

$$= \frac{3(1 - x) - x}{3\sqrt[3]{(1 - x)^2}}$$

$$= \frac{3 - 4x}{3\sqrt[3]{(1 - x)^2}}$$



لدينا: جدول إشارة $3-4x$ هو كالتالي:

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	1
$3-4x$	$+$	0	$-$

إذن: جدول تغيرات الدالة f هو كالتالي:

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{1 - \frac{3}{4}} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) \simeq 0,47$$

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $+$	
f	$-\infty$	↗	$f\left(\frac{3}{4}\right)$	↘	0	↗	$+\infty$

5) دراسة الفروع اللانهائية:

• لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ،

ليكن x من $]1;+\infty[$، لدينا: $\frac{f(x)}{x} = \frac{x-1}{x} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1 - \frac{1}{x} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$

وبما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$

• لنحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-2x)$

ليكن x من $]1;+\infty[$، لدينا: $f(x)-2x = x-1+\sqrt{x^2-1}-2x = \sqrt{x^2+1}-(1+x)$

$$= \frac{x^2+1-(1+x)^2}{\sqrt{x^2+1}+(1+x)} = \frac{-2x}{\sqrt{x^2+1}+x+1} = \frac{-2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}$$

وبما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-2x) = \frac{-2}{2} = -1$

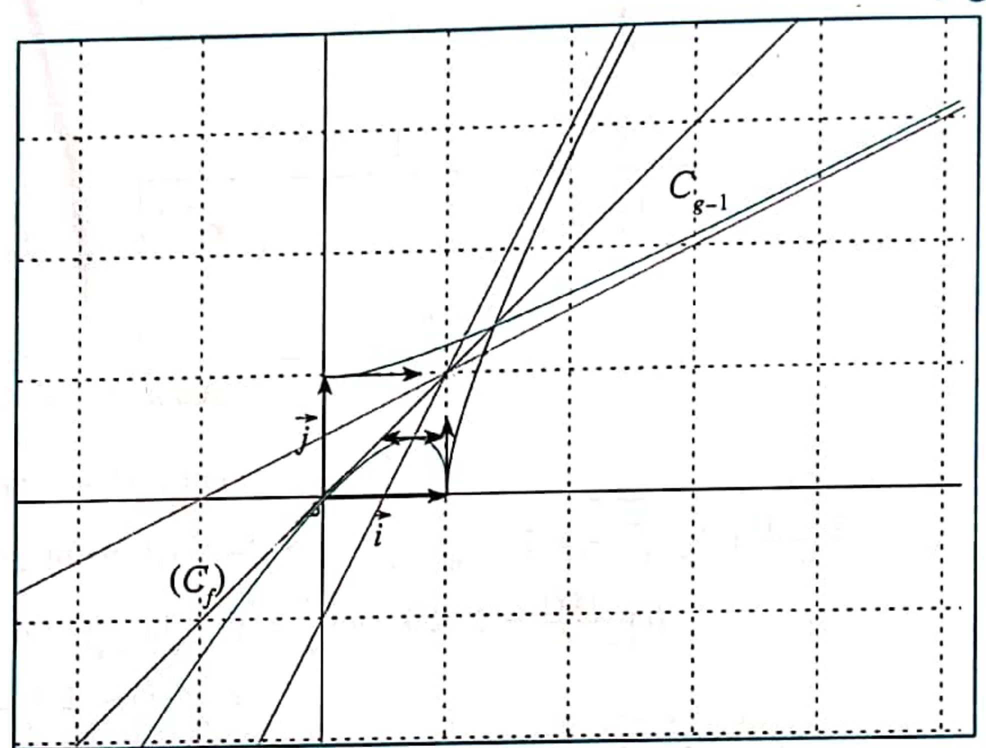
إذن منحنى الدالة f يقبل مقاربا مائلا معادلته $y=2x-1$ بجوار $+\infty$.

• لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، ليكن x من $]-\infty;1[$، لدينا: $\frac{f(x)}{x} = \sqrt[3]{1-x}$

وبما أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{1-x} = +\infty$ ، فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

إذن منحنى الدالة f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $-\infty$.

6) إنشاء منحنى f



7) أ– لنبين أن g تقبل دالة عكسية.

لدينا، الدالة g هي قصور الدالة f على المجال $I = [1, +\infty[$

الدالتان $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ و $x \mapsto x - 1$ متصلتان على المجال $I = [1, +\infty[$

إذن g دالة متصلة على المجال $[1; +\infty[$ مجموع دالتين متصلتين

و g تزايدية قطعا على $[1; +\infty[$، إذن g تقبل دالة عكسية معرفة على المجال

$$g([1; +\infty[) = \left[g(1); \lim_{x \to +\infty} g(x)\right[= [0, +\infty[= J$$

ب– حساب $(g^{-1})'(2)$:

لنحدد أولا $g^{-1}(2)$، لدينا: ليكن a من $[1; +\infty[$

$$g^{-1}(2) = a \Leftrightarrow g(a) = 2$$
$$\Leftrightarrow a - 1 + \sqrt{a^2 - 1} = 2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 - 1} = 3 - a$$
$$\Leftrightarrow a^2 - 1 = (3 - a)^2 \text{ و } 3 - a \geq 0$$
$$\Leftrightarrow a^2 - 1 = 9 - 6a + a^2 \text{ و } a \leq 3$$
$$\Leftrightarrow 6a = 8 \quad (a \leq 3)$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{4}{3}$$

إذن: $g^{-1}(2) = \frac{4}{3}$

خطأ
$6a = 10$
$a = \frac{5}{3}$



$$g'\left(\frac{4}{3}\right) = 1 + \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 1}} = 1 + \frac{4}{3} \times \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{3}} = 1 + \frac{4\sqrt{7}}{7} = \frac{\sqrt{7} + 4}{\sqrt{7}}$$

ومنه:

$$(g^{-1})'(2) = \frac{1}{g'(g^{-1}(2))} = \frac{1}{g'\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} + 4} = \frac{\sqrt{7}(\sqrt{7} - 4)}{7 - 16} = \frac{7 - 4\sqrt{7}}{-9} = \frac{4\sqrt{7} - 7}{9}$$

$(g^{-1})'(2) = \frac{4}{9}$

ج- تعبير $g^{-1}(x)$ لكل x من J:

ليكن $x \in J$ و $y \in I$، حيث $I = [1; +\infty[$ و $J = [0; +\infty[$

$$\begin{aligned} g^{-1}(x) = y &\iff g(y) = x \\ &\iff y - 1 + \sqrt{y^2 - 1} = x \\ &\iff \sqrt{y^2 - 1} = x - y + 1 \\ &\iff y^2 - 1 = [(x - y) + 1]^2 \\ &\iff y^2 - 1 = (x - y)^2 + 2(x - y) + 1 \\ &\iff y^2 - 1 = x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 1 \\ &\iff y(2x + 2) = x^2 + 2x + 2 \\ &\iff y = \frac{x^2 + 2x + 2}{2x + 2} \qquad (x \neq -1 \text{ :لأن}) \end{aligned}$$

إذن: $g^{-1}(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{2(x + 1)}$; $\forall x \in [0, +\infty[$

د- إنشاء منحنى الدالة g^{-1}

في المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$، لدينا: Cg و C_{g-1} متماثلان بالنسبة للمنصف الأول (Δ) الذي معادلته $(y=x)$. (انظر الشكل)

التمرين 22

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بمايلي:

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{x(x - 2)} & ; x \in]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[\\ f(x) = x - \sqrt{2x} & ; x \in]0; 2[\end{cases}$$

وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم

1) احسب $f(4)$ ؛ $f(-2)$.

2) تحقق من أن f متصلة في 0 و2.

3) ادرس اشتقاق f على اليمين وعلى اليسار في كل من النقطتين 0 و2 وأول النتائج هندسيا.



4) أ- بين أن:

$$(\forall x \in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[);\ f'(x)=\frac{2}{3}\left[\frac{x-1}{\left(\sqrt[3]{x(x-2)}\right)^2}\right]$$

و $(\forall x \in]0;2[);\ f'(x)=\dfrac{2\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$

ب- أعط جدول تغيرات f.

1) ادرس الفروع اللانهائية وأنشئ (C_f).

2) ليكن g قصور الدالة f على $I=[2;+\infty[$

أ- بين أن g تقبل دالة عكسية معرفة من مجال J يجب تحديده نحو المجال J.

ب- أنشئ Cg^{-1} منحنى الدالة g^{-1}.

الحل

1) لنحسب $f(4)$ و $f(-2)$

- لدينا: $f(4)=\sqrt[3]{4(4-2)}=\sqrt[3]{8}=2$

- لدينا: $f(-2)=\sqrt[3]{-2(-2-2)}=\sqrt[3]{8}=2$

2) لنتحقق من أن f متصلة في 0 و 2.

- لدينا: $f(0)=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\sqrt[3]{x(x-2)}=0=f(0)$

و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x-\sqrt{2x})=0=f(0)$

إذن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$، ومنه f دالة متصلة في الصفر.

- لدينا: $f(2)=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\sqrt[3]{x(x-2)}=0=f(2)$

و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(x-\sqrt{2x})=0=f(2)$

إذن: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$، ومنه f دالة متصلة في 2.

3) لندرس قابلية اشتقاق f في كل من 0 و 2.

- دراسة قابلية اشتقاق f في الصفر

لدينا $f(0)=0$ ، وليكن x عنصراً من $]-\infty,0[$

لدينا: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{\sqrt[3]{x(x-2)}}{x}=\dfrac{\sqrt[3]{x(x-2)}}{-\sqrt[3]{-x^3}}=-\sqrt[3]{-\dfrac{1}{x^2}(x-2)}$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to 0^-}(x-2)=-2$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\dfrac{1}{x^2}(x-2)\right)=+\infty$

ومنه: $\lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt[3]{-\frac{1}{x^2}(x-2)} = +\infty$ ، وبالتالي: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في الصفر

قابلية اشتقاق f على اليمين في الصفر

ليكن x عنصراً من $]0;2[$، لدينا: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x-\sqrt{2x}}{x} = 1 - \frac{\sqrt{2x}}{x} = 1 - \frac{2}{\sqrt{2x}}$

ولدينا: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{2}{\sqrt{2x}} = +\infty$، إذن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر.

التأويل الهندسي:

منحنى الدالة f يقبل في النقطة O نصفي مماسين عموديين أحدهما موجه نحو الأراتيب الموجبة (حالة $x<0$)، والآخر نحو الأراتيب السالبة (إذن في النقطة O (C_f) يقبل مماساً عمودياً).

• لندرس قابلية اشتقاق الدالة f في 2

لدينا: $f(2)=0$

قابلية اشتقاق f على اليمين في 2.

ليكن x عنصراً من $]2;+\infty[$، لدينا: $f(x) = \sqrt[3]{x(x-2)}$

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{\sqrt[3]{x(x-2)}}{x-2} = \frac{\sqrt[3]{x(x-2)}}{\sqrt[3]{(x-2)^3}} = \sqrt[3]{\frac{x}{(x-2)^2}}$$

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} \frac{x}{(x-2)^2} = +\infty$، إذن $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} \sqrt[3]{\frac{x}{(x-2)^2}} = +\infty$

ومنه: $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$، وبالتالي f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 2.

قابلية اشتقاق f على اليسار في 2:

ليكن x عنصراً من $]0;2[$، لدينا: $f(x) = x - \sqrt{2x}$

لدينا: $\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{x-\sqrt{2x}}{x-2} = \frac{x^2-2x}{(x-2)(x+\sqrt{2x})} = \frac{x}{x+\sqrt{2x}}$

إذن: $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{1}{2}$، وبالتالي f قابلة للاشتقاق على اليسار في 2.

التأويل الهندسي:

منحنى الدالة f يقبل نصفي مماس في النقطة $A(2;0)$ أحدهما مواز لمحور الأراتيب (وموجه نحو الأراتيب الموجبة)، (حالة $x>2$) والآخر معامله الموجه $\frac{1}{2}$، (حالة $x<2$).

4) أ– لنحسب $f'(x)$ لكل x من $D_f - \{0;2\}$

- إذا كان $x \in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ فإن: $f(x) = \sqrt[3]{x(x-2)}$

ومنه: $f'(x) = \dfrac{(x(x-2))'}{3\sqrt[3]{(x(x-2))^2}} = \dfrac{2x-2}{3\sqrt[3]{(x(x-2))^2}} = \dfrac{2}{3}\left[\dfrac{x-1}{\left(\sqrt[3]{x(x-2)}\right)^2}\right]$

- إذا كان x من $]0;2[$، فإن: $f(x) = x - \sqrt{2x}$، ومنه: $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{2\sqrt{2x}} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}$

$= 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$

إذن لكل x من $]-\infty;0[\cup]2,+\infty[$ لدينا: $f'(x) = \dfrac{2}{3}\left[\dfrac{x-1}{\left(\sqrt[3]{x(x-2)}\right)^2}\right]$

ولكل x من $]0;2[$ $\quad f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$

ب– جدول تغيرات f:

- إذا كان x من $]0;2[$ فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة: $2\sqrt{x} - \sqrt{2}$

- $f'(x) = 0 \iff 2\sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$
$\iff \sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\iff x = \dfrac{1}{2}$

- $f'(x) > 0 \iff 2\sqrt{x} - \sqrt{2} > 0$
$\iff 2\sqrt{x} > \sqrt{2}$
$\iff x > \dfrac{1}{2}$

إذن:

x	0		$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	

- إذا كان x من $]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x-1$.
- إذا كان $x>2$، فإن: $x-1>0$، ومنه: $f'(x)>0$
- إذا كان $x<0$، فإن: $x-1<0$ ، ومنه: $f'(x)<0$

إذن:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	//////	||	$+$	

ومنه جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$-$	0	$+$	‖ $+\infty$	$+$	
f	$+\infty$	↘			$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$	↗			$+\infty$



تحقق من النهايتين: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

1) لندرس الفروع اللانهائية لمنحنى f

- لدينا: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، لنحسب $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

ليكن x من $]-\infty,0[$ ، لدينا: $\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt[3]{x(x-2)}}{x}=-\frac{\sqrt[3]{x(x-2)}}{\sqrt[3]{-x^3}}=-\sqrt[3]{\frac{-1}{x}+\frac{2}{x^2}}$

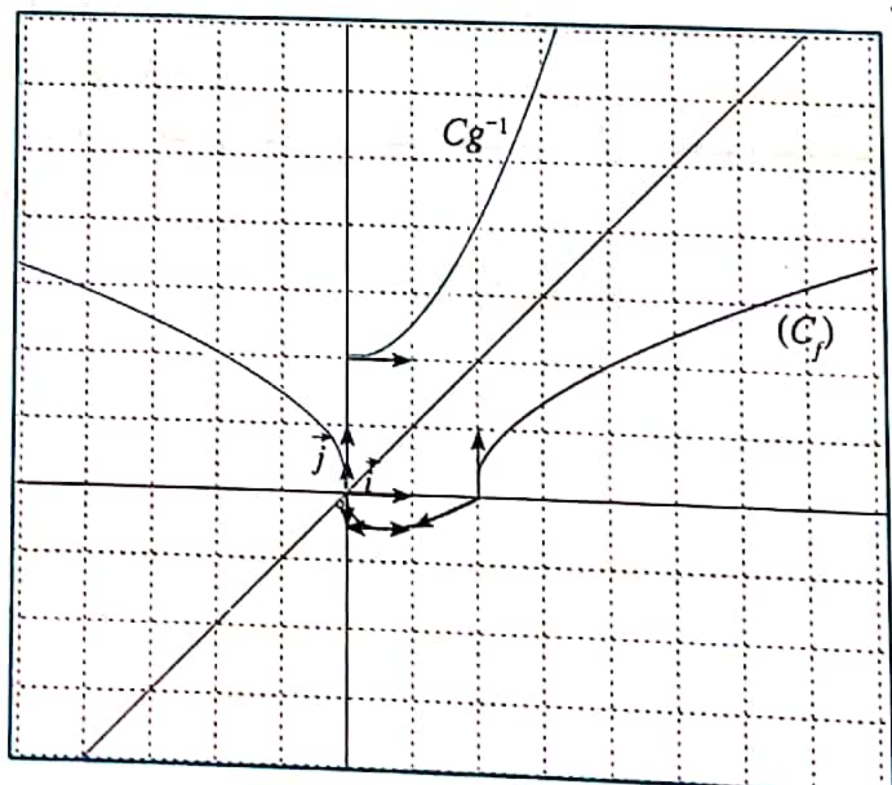
وبما أن: $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=0^+$ فإن: $\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{-1}{x}+\frac{2}{x^2}}=0$ ، ومنه: $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

إذن (C_f) يقبل فرعاً شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$.

- لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، لنحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ، لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=0$

إذن منحنى الدالة f يقبل فرعاً شلجمياً اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

– إنشاء منحنى f



أ– لنبين أن g تقابل من المجال $I=[2;+\infty[$ نحو $J=g(I)$.

• لدينا f دالة متصلة على المجال $[2,+\infty[$ لأنها مركب دالتين متصلتين: $u:x\mapsto x(x-2)$ متصلة وموجبة على I (دالة حدودية)، و $v:x\mapsto\sqrt[3]{x}$ متصلة على $u(I)$ (لأن $u(I)\subset IR^{+}$)

إذن الدالة g متصلة على المجال I

• لدينا f تزايدية قطعاً على $[2,+\infty[$، إذن g تزايدية قطعا على I، وبالتالي الدالة g تقبل دالة عكسية معرفة على المجال $J=g(I)$

$g(I)=f(I)=[0;+\infty[$، إذن: $J=[0;+\infty[$

• لنحدد $g^{-1}(x)$ لكل x من $[0,+\infty[$

ليكن x عنصراً من $[0,+\infty[$، نضع $g^{-1}(x)=y$ حيث $y\in[2;+\infty[$

$$\begin{aligned} g^{-1}(x)=y &\iff g(y)=x\\ &\iff \sqrt[3]{y(y-2)}=x\\ &\iff y(y-2)=x^3\\ &\iff y^2-2y=x^3\\ &\iff (y-1)^2-1=x^3\\ &\iff |y-1|=\sqrt{1+x^3}\\ &\iff y=1+\sqrt{1+x^3} \quad (\text{لأن: } y-1>0) \end{aligned}$$

إذن: $g^{-1}(x)=1+\sqrt{1+x^3}$ لكل x من $[0,+\infty[$.

ب– إنشاء منحنى الدالة العكسية g^{-1}

منحنى g^{-1} هو مماثل منحنى الدالة g بالنسبة للمنصف الأول للمعلم (المستقيم الذي معادلته $y=x$) (انظر الشكل).

التمرين 23

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي: $\begin{cases} f(x)=x-\sqrt[3]{1-x}\,;\,x\in]-\infty;1[\\ f(x)=\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}\,;\,x\in[1;+\infty[\end{cases}$

(C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=1cm$

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f، ثم أثبت أن f متصلة عند النقطة $x_0=1$.

2) أ– بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 1؛

ب– احسب $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)$ ثم أول مبيانيا النتيجة التي تم التوصل إليها.

3) أ– احسب النهايات عند محدات D؛

ب– أعط جدول تغيرات الدالة f.

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $]-\infty;1]$، وأن: $\frac{1}{2}<\alpha<\frac{3}{4}$.

5) أ– ادرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f؛

ب– أنشئ منحنى الدالة f. $\left(f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

الحل

1) لنحدد D مجموعة تعريف الدالة f

$$x\in D \iff (1-x\geq 0 \text{ و } x\in]-\infty;1]) \text{ أو } (x\in[1;+\infty[\text{ و } x\geq 0 \text{ و } 2-\sqrt{x}\neq 0)$$
$$\iff (x\in]-\infty;1] \text{ أو } (x\in[1;+\infty[\text{ و } \sqrt{x}\neq 2))$$
$$\iff (x\in]-\infty;1] \text{ أو } (x\in[1;+\infty[\text{ و } x\neq 4))$$
$$\iff x\in]-\infty,4[\cup]4;+\infty[$$

وبالتالي: $D=]-\infty;4[\cup]4;+\infty[$

– لنبين أن: f متصلة في 1

لدينا: $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{2-\sqrt{x}}=\frac{1}{2-1}=1=f(1)$

و $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(x-\sqrt[3]{1-x}\right)=1-0=1=f(1)$

ومنه: $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$، إذن f متصلة في 1

2) أ– لنبين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 1

لدينا: $(\forall x\in]1;4[);\ \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\frac{1}{2-\sqrt{x}}-1}{x-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)(2-\sqrt{x})}$

ومنه: $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1}{(\sqrt{x}+1)(2-\sqrt{x})}$

إذن: $\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(\sqrt{x}+1)(2-\sqrt{x})}=\frac{1}{2}$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 و $f'_d(1)=\frac{1}{2}$

ب– لنحسب $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

ليكن x من $]-\infty,1[$، لدينا:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x-1-\sqrt[3]{1-x}}{x-1}=1+\frac{\sqrt[3]{1-x}}{1-x}$$

إذن: $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$ لكل x من $]-\infty;1[$

لدينا: $\lim_{x \to 1^-} \sqrt[3]{(1-x)^2} = 0^+$ ، ومنه: $\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$

وبالتالي: f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 1.

– التأويل الهندسي

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(1;1)$.

3) لنحسب نهايات f عند محدات D.

- لدينا: $\lim_{x \to +\infty} (2-\sqrt{x}) = -\infty$

ومنه: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2-\sqrt{x}} = 0$

- لدينا: $2-\sqrt{x} = \frac{4-x}{2+\sqrt{x}}$ ، ومنه: $\lim_{x \to 4^-} (2-\sqrt{x}) = 0^+$ و $\lim_{x \to 4^+} (2-\sqrt{x}) = 0^-$

إذن: $\lim_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$

- ليكن x من $]-\infty;0[$ ، لدينا:

$$f(x) = x - \sqrt[3]{1-x} = x - \sqrt[3]{(-x)^3\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)} = x + x\sqrt[3]{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}$$

ومنه: $f(x) = x\left(1 + \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}\right)$

وبما أن: $\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}\right) = 1$ و $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$

فإن: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

ب– لنحدد جدول تغيرات الدالة f

- لدينا: $(\forall x \in]-\infty;1[); f'(x) = 1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}$

ومنه $(\forall x \in]-\infty;1[); f'(x) > 0$ (لأن: $\sqrt[3]{(1-x)^2} > 0$)

$$(\forall x \in]1;4[\cup]4;+\infty[)\ f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2-\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}(2-\sqrt{x})^2}$$

ومنه: $(\forall x \in]1;4[\cup]4;+\infty[) f'(x) > 0$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+\infty$ ‖ $\frac{1}{2}$	$+$	‖	$+$	
f	$-\infty$	↗		↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

4) لنبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيداً α على $]0;1[$ وأن $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$

لدينا الدالة $x \mapsto 1 - x$ متصلة وموجبة على المجال $]-\infty; 1]$ ومنه الدالة $x \mapsto \sqrt[3]{1-x}$ متصلة على المجال $]-\infty; 1]$

والدالة: $x \mapsto x$ متصلة على $]-\infty; 1]$، ومنه الدالة $x \mapsto x - \sqrt[3]{1-x}$ متصلة على المجال $]-\infty; 1]$ كمجموع دالتين متصلتين على المجال $]-\infty; 1]$ أي f متصلة على المجال $]-\infty; 1]$

لدينا: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$، وبما أن: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \frac{1}{2}$ فإن $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

ولدينا: $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} - \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$، وبما أن: $\left(\frac{3}{4}\right)^3 > \frac{1}{4}$ فإن $f\left(\frac{3}{4}\right) > 0$

لدينا إذن: f متصلة على $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{3}{4}\right) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد على الأقل α من المجال $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$ بحيث: $f(\alpha) = 0$.

وبما أن f تزايدية قطعا على المجال $]-\infty; 1]$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيداً هو العدد α ولدينا: $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$

5) الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$، ومنه محور الأفاصيل، أي المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ولدينا أيضا: $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$

ومنه المستقيم الذي معادلته $x=4$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

لدينا: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ لنحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

لدينا: $(\forall x \in]-\infty; 1[)\ \frac{f(x)}{x} = 1 + \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}$، ومنه: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

لنحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - x)$

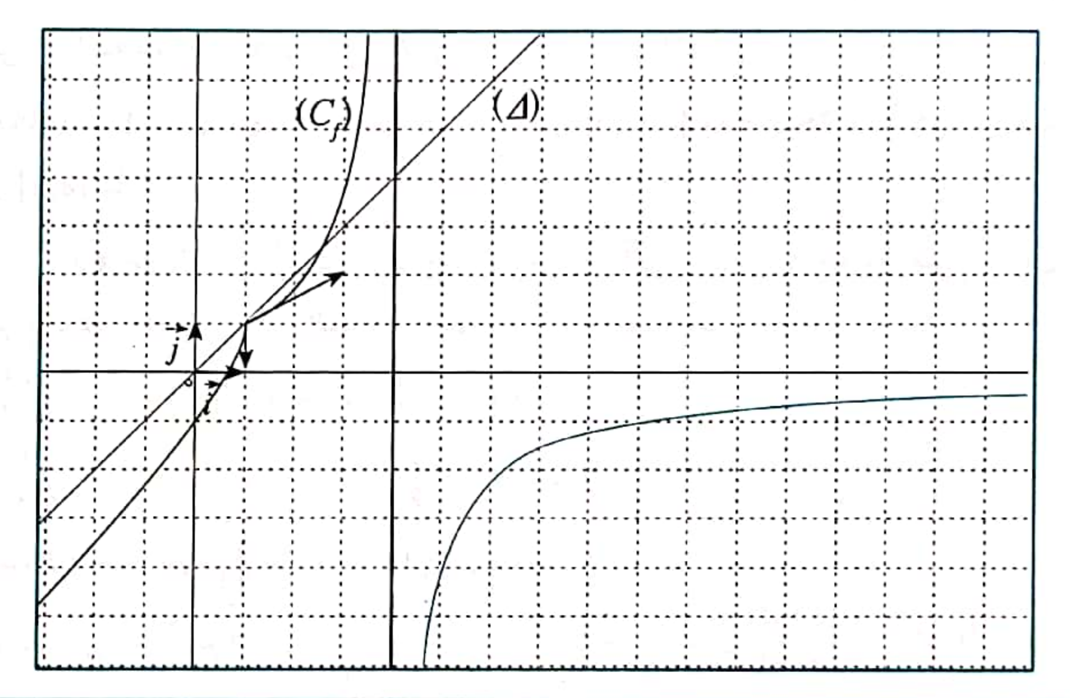
$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(-\sqrt[3]{1 - x}\right) = -\infty$$

(لأن: $\lim_{x \to -\infty} (1 - x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{1 - x} = +\infty$)

وبالتالي: (C_f) يقبل فرعاً شلجميا اتجاهه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ بجوار $-\infty$.

ب- إنشاء المنحنى C_f.

لدينا: $f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$، ومنه (C_f) يقطع المستقيم (Δ): $y = x$ في النقطة ذات الأفصول $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$



التمرين 24

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي:
$$\begin{cases} f(x) = 3.\sqrt[3]{1 - x} + x \,;\, x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{2x^2 + 2}} \quad ;x > 1 \end{cases}$$

((C_f) هو منحنى f في معلم متعامد ممنظم).

1) أ- بين أن f متصلة في النقطة $x_0 = 1$

ب- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0 = 1$؛

ج- أعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها.

2) أ- احسب النهايات الآتية:

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ؛ $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ، $\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - x\right)$ ؛

ب- حدد: $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ؛

ج- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f).

3) أ– بين أن:
$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{\sqrt[3]{(1-x)^2}-1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} & ; x < 1 \\ f'(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{2(1+x^2)^3}} & ; x > 1 \end{cases}$$

ب– استنتج تغيرات الدالة f.

4) أنشئ (C_f).

الحل

1) أ– لنبين أن f متصلة في $x_0=1$

لدينا: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (3\sqrt[3]{1-x} + x) = 1 = f(1)$

و $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}} = 1 = f(1)$

ومنه: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ إذن f متصلة في 1

ب– لندرس قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0=1$

• ليكن x من $]-\infty; 1[$ لدينا:
$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{3\sqrt[3]{1-x} + x - 1}{x-1} = \frac{3\sqrt[3]{1-x}}{x-1} + 1 = \frac{-3}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} + 1$$

لدينا: $\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt[3]{(1-x)^2} = 0^+$

ومنه $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-3}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} = -\infty$

إذن: $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$

• ليكن x من $]1; +\infty[$
$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\dfrac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}} - 1}{x-1}$$
$$= \frac{x+1-\sqrt{2x^2+2}}{(x-1)\sqrt{2x^2+2}}$$
$$= \frac{-(x-1)^2}{(x-1)\sqrt{2x^2+2}\left(x+1+\sqrt{2x^2+2}\right)}$$
$$= \frac{-(x-1)}{\sqrt{2x^2+2}\left(x+1+\sqrt{2x^2+2}\right)}$$



ومنه: $\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$

إذن: f قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 و $f'_d(1) = 0$ و f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 1.

ج- التأويل الهندسي

(C_f) يقبل نصفي مماس في النقطة $A(1,1)$: أحدهما عمودي موجه نحو الأعلى، والآخر أفقي معادلته: $\begin{cases} y = 1 \\ x \geq 1 \end{cases}$

2) أ- حساب النهايات

• ليكن x من $]-\infty; 0[$، لدينا:

$$f(x) = 3\sqrt[3]{(-x)^3\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)} + x = -3x\sqrt[3]{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} + x = x\left(-3\sqrt[3]{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} + 1\right)$$

لدينا: $\begin{cases} \lim_{x \to -\infty}\left(-3\sqrt[3]{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} + 1\right) = 1 \\ \lim_{x \to -\infty} x = -\infty \end{cases}$ ومنه: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

لدينا: $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty}\left(-3\sqrt[3]{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} + 1\right) = 1$ و $\lim_{x \to -\infty}(f(x) - x) = \lim_{x \to -\infty} 3\sqrt[3]{1 - x} = +\infty$

ب- لنحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

لدينا: $(\forall x \in]1 ; +\infty[) f(x) = \frac{x + 1}{x\sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{2 + \frac{2}{x}}}$

بما أن: $\lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$ و $\lim_{x \to +\infty}\sqrt{2 + \frac{2}{x}} = \sqrt{2}$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ج. لدينا: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$، ومنه المستقيم الذي معادلته $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ مقارب أفقي ل (C_f) بجوار $+\infty$

لدينا: $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ و $\lim_{x \to -\infty}(f(x) - x) = +\infty$

ومنه (C_f) يقبل فرعاً شلجميا اتجاهه المستقيم الذي معادلته $y=x$ بجوار $-\infty$.

3) أ- حساب $f'(x)$

ليكن x من $]-\infty; 1[$، لدينا $f(x) = 3\sqrt[3]{1 - x} + x$

ومنه: $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{(1 - x)^2}} + 1 = \frac{\sqrt[3]{(1 - x)^2} - 1}{\sqrt[3]{(1 - x)^2}}$

ليكن x من $]1; +\infty[$، لدينا: $f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 + 2}}$

ومنه: $f'(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 2} - (x + 1)\frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 2}}}{2x^2 + 2} = \frac{(2x^2 + 2) - 2x(x + 1)}{2(x^2 + 1)\sqrt{2x^2 + 2}} = \frac{(x^2 + 1) - (x^2 + x)}{(x^2 + 1)\sqrt{2x^2 + 2}}$

وبالتالي: لكل x من $]1;+\infty[$؛ $f'(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{2(x^2+1)^3}}$

ب- ليكن x من $]-\infty;1[$

$$\sqrt[3]{(1-x)^2}-1=(\sqrt[3]{1-x}-1)(\sqrt[3]{1-x}+1)$$

ولدينا: $\sqrt[3]{1-x}-1=\dfrac{-x}{\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{1-x}+1}$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $-x$ على $]-\infty;1[$

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		+	0	−	

ليكن x من $]1,+\infty[$، لدينا: $f'(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{2(1+x^2)^2}}$ ومنه: $f'(x)<0$ $\left(\forall x\in\,]1;+\infty[\right)$

وبالتالي جدول تغيرات الدالة f هو كالتالي:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	− $-\infty$	‖	0 −	
f	$-\infty$	↗	3	↘		↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

4) إنشاء (C_f).

(C_f)

$\vec{j}$ $\vec{i}$

$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

التمرين 25

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ بمايلي: $f(x) = \frac{4x^3 - 3x}{(2x-1)^2}$

1) حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث:

$$\left(\forall x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[\right); f(x) = ax + b + \frac{c}{(2x-1)^2}$$

2) استنتج الدوال الأصلية للدالة f على المجال $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

الحل

1) تحديد الأعداد الحقيقية a و b و c

ليكن x عنصرا من المجال $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$، لدينا:

$$\begin{aligned} ax + b + \frac{c}{(2x-1)^2} &= \frac{(ax+b)(2x-1)^2 + c}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{(ax+b)(4x^2-4x+1) + c}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{4ax^3 + (4b-4a)x^2 + (a-4b)x + b + c}{(2x-1)^2} \end{aligned}$$

إذن لكل x من $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$، لدينا:

$$\frac{4x^3 - 3x}{(2x-1)^2} = \frac{4ax^3 + (4b-4a)x^2 + (a-4b)x + b + c}{(2x-1)^2}$$

أي لكل x من $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$، لدينا:

$$4x^3 - 3x = 4ax^3 + (4b-4a)x^2 + (a-4b)x + b + c$$

ومنه فإن: $\begin{cases} 4a = 4 \\ 4b - 4a = 0 \\ a - 4b = -3 \\ b + c = 0 \end{cases}$

يعني أن: $a = b = 1$ و $c = -1$

وبالتالي فإن: $\left(\forall x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[\right); f(x) = x + 1 - \frac{1}{(2x-1)^2}$

2) تحديد الدوال الأصلية

ليكن x عنصرا من المجال $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$، لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(x^2)' + (x)' - \frac{1}{2}(2x-1)'(2x-1)^{-2} \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)' - \frac{1}{2}\left(-(2x-1)^{-1}\right)' = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2x-1}\right)' \end{aligned}$$

وبالتالي فإن الدوال الأصلية للدالة f على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ هي الدوال المعرفة على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بمايلي: $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2(2x-1)} + k$، حيث k عدد حقيقي.

التمرين 26

حدد الدوال الأصلية للدالة العددية f على المجال I، في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $f(x)=x^3(x^4-1)^2$ ؛ $I=IR$

2) $f(x)=\dfrac{x+1}{(x^2+2x-3)^2}$ ؛ $I=]1,+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}+\sqrt{x+2}$ ؛ $I=[0,+\infty[$

4) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ ؛ $I=IR$

5) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ ؛ $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

الحل

في كل مايلي المجموعة $\{F_\alpha/\alpha \in IR\}$ هي مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال I.

1) لنحديد الدوال الأصلية للدالة f بحيث $f(x)=x^3(x^4-2)^2$

لكل x من IR، نضع: $u(x)=x^4-1$

لدينا: $(\forall x \in IR), u'(x)=4x^3$، ومنه فإن: $(\forall x \in IR); f(x)=\frac{1}{4}u'(x).(u(x))^2$

إذن: $(\forall x \in IR); F_\alpha(x)=\frac{1}{12}(u(x))^3+\alpha$

أي: $(\forall x \in IR); F_\alpha(x)=\frac{1}{12}(x^4-1)^3+\alpha$

2) لنحدد الدوال الأصلية للدالة $f:x \mapsto \dfrac{x+1}{(x^2+2x+1)^2}$ على المجال $I=]1;+\infty[$

$$I=]1,+\infty[; f(x)=\frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}$$

لكل x من I، نضع: $u(x)=x^2+2x-3$

لدينا: $u'(x)=2(x+1)$; $(\forall x \in I)$

ومنه: $f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{u'(x)}{(u(x))^2}\right)$; $(\forall x \in I)$

إذن: الدوال الأصلية للدالة f هي الدوال المعرفة على IR بما يلي: $F(x) = \dfrac{-1}{2(x^2+2x+3)} + \alpha$

حيث $\alpha \in IR$ ؛ أي أن: $(\forall x \in IR)\ ;\ F_\alpha(x) = \dfrac{-1}{2(x^2+2x+3)} + \alpha$

3) الدوال الأصلية للدالة $f(x) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} + \sqrt{x+2}$

$$I = [0, +\infty[\quad ; \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \sqrt{x+2}$$

تذكير:

دالة أصلية للدالة $x \mapsto (ax+b)^r$ على مجال I هي: $x \mapsto \dfrac{1}{a(r+1)}(ax+b)^{r+1}$ ، حيث $r \in Q^* - [-1]$ و $ax+b>0$ لكل x من I.

لدينا: $(\forall x \in I)\quad ;\quad f(x) = (2x+1)^{-\frac{1}{2}} + (x+2)^{\frac{1}{2}}$

ومنه فإن: $(\forall x \in I): F_\alpha(x) = \sqrt{2x+1} + \dfrac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2} + \alpha$

(4

تذكير:

دالة أصلية للدالة: $x \mapsto u'(x)(u(x))^r$ على مجال I هي الدالة: $x \mapsto \dfrac{1}{r+1}(u(x))^{r+1}$ ، حيث I مجال تكون فيه u دالة قابلة للاشتقاق وموجبة قطعا، و $r \in Q - \{-1\}$

لدينا: $I = IR \quad ; \quad f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

لكل x من IR، نضع: $u(x)=x^2+1$

ومنه فإن: $u'(x) = 2x \quad ; \quad (\forall x \in IR)$ ، إذن $f(x) = \dfrac{1}{2}u'(x).(u(x))^{-\frac{1}{3}} \quad ; \quad (\forall x \in IR)$

وبالتالي: $(\forall x \in IR)\quad ;\quad F_\alpha(x) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}(u(x))^{1-\frac{1}{3}} + \alpha$

أي : $(\forall x \in IR)\quad ;\quad F_\alpha(x) = \dfrac{3}{4}(x^2+1)^{\frac{2}{3}} + \alpha$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+1)^2} + \alpha$$

(5 $I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[\quad ; \quad f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$



لكل x من I، نضع: $u(x)=cosx$

ومنه: $u'(x)=-\sin x \quad ; \quad (\forall x \in I)$، إذن: $f(x)=-\dfrac{u'(x)}{(u(x))^3} \quad ; \quad (\forall x \in I)$

وبالتالي: $F_\alpha(x)=\dfrac{1}{2\cos^2 x}+\alpha \quad ; \quad (\forall x \in I)$

التمرين 26

حدد دالة أصلية للدالة العددية f على المجال I، ثم استنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على I، لكل دالة من الدوال التالية:

1) $f(x)=2x^3-4x+1$ ؛ $I=IR$

2) $f(x)=\dfrac{2}{x^2}-x$ ؛ $I=]0;+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2+x+1}{x^5}$ ؛ $I=]-\infty;0[$

4) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ ؛ $I=]0;+\infty[$

5) $f(x)=x^2-\sqrt[3]{x}$ ؛ $I=[0;+\infty[$

6) $f(x)=sinx\ cosx$ ؛ $I=IR$

7) $f(x)=tan^2x$ ؛ $I=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

الحل

في كل مايلي F دالة أصلية للدالة f على I و F_α جميع الدوال الأصلية للدالة f على I، حيث α عدد حقيقي.

1) $f(x)=2x^3-4x+1$ ؛ $I=IR$

لدينا: $F(x)=\dfrac{1}{2}x^4-2x^2+x \quad ; \quad (\forall x \in IR)$ و $F_\alpha(x)=\dfrac{1}{2}x^4-2x^2+x+\alpha \quad ; \quad (\forall x \in IR)$

2) $f(x)=\dfrac{2}{x^2}-x \quad ; \quad I=]0,+\infty[$

لدينا: $F(x)=-\dfrac{2}{x}-\dfrac{x^2}{2} \quad ; \quad (\forall x \in I)$ و $F_\alpha(x)=-\dfrac{2}{x}-\dfrac{x^2}{2}+\alpha \quad ; \quad (\forall x \in I)$

3) $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2+x+1}{x^5} \quad ; \quad I=]-\infty,0[$

لدينا: $f(x)=\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^5} \quad ; \quad (\forall x \in I)$

ومنه: $F_\alpha(x)=-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{3x^3}-\dfrac{1}{4x^4}+\alpha \quad ; \quad (\forall x \in I)$



(4 $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$; $I =]0, +\infty[$

لدينا: $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}$; $(\forall x \in I)$

و $F_\alpha(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + \alpha$; $(\forall x \in I)$

(5 $f(x) = x^2 - \sqrt[3]{x}$; $I = [0, +\infty[$

لدينا: $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$; $(\forall x \in I)$

و $F_\alpha(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + \alpha$; $(\forall x \in I)$

(6 $f(x)=\sin x \cos x$ ؛ $I=IR$

لدينا: $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$: $(\forall x \in IR)$

ومنه: $F(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x$; $(\forall x \in IR)$، و $F_\alpha(x) = -\frac{1}{4}\cos(2x) + \alpha$; $(\forall x \in IR)$

(7 $f(x) = \tan^2 x$; $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

لدينا: $f(x) = (1 + \tan^2 x) - 1$; $(\forall x \in I)$، ومنه: $F(x) = \tan x - x$; $(\forall x \in I)$

و $F_\alpha(x) = \tan x - x + \alpha$; $(\forall x \in I)$